Задачи върху релации

Задача 1. Напишете всички елементи на триместната хомогенна релация $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, дефинирана така: $R = \{(a, b, c) \,|\, 0 < a < b < c < 5\}$.

Задача 2. Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Нека $R_1 \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq A \times B$ са такива, че $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ и $R_2 = \{(1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2)(2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$. Намерете

а) $R_1 \cup R_2$ **б)** $R_1 \cap R_2$ **в)** $R_1 \setminus R_2$ **г)** $R_2 \setminus R_1$ **д)** $(R_1 \setminus R_2) \times (A \times B)$

Задача 3. Нека A е множеството от студентите в някакъв университет. Нека B е множеството от книгите в библиотеката на университета. Нека $R \subseteq A \times B$ и $R_2 \subseteq A \times B$ са съответно релациите:

$$R_1 = \{(a, b) \,|\, \text{студент } a \text{ трябва да прочете книга } b\}$$
$$R_2 = \{(a, b) \,|\, \text{студент } a \text{ е чел книга } b\text{, която е трябвало да прочете}\}$$

Опишете следните релации

а) $R_1 \cup R_2$ **б)** $R_1 \cap R_2$ **в)** $R_1 \triangle R_2$ **г)** $R_1 \setminus R_2$ **д)** $R_2 \setminus R_1$

Задача 4. Нека A и B са крайни множества. Нека $|A| = 3$. Намерете $|B|$, ако е известно, че има точно 4096 релации от вида $R \subseteq A \times B$?

Упътване: $4096 = 2^{12}$.

Казвайки "релация" без допълнителни уточнения, имаме предвид двуместна хомогенна релация. Когато казваме "крайна релация", имаме предвид, че домейнът е краен. Казвайки "релация над A", имаме предвид релация от вида $R \subseteq A \times A$. Казвайки "релация над декартовия квадрат $A \times A$" имаме предвид същото нещо, а именно, че $R \subseteq A \times A$; а **не** че $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$. Фактът, че $a \in A$ и $b \in A$ са в релация бележим с "$(a, b) \in R$" или с по-краткия запис "aRb".

Определение 1. Нека R е релация над A. Нека домейните за a, b и c са A.

- R е *рефлексивна*, ако $\forall a(aRa)$.
- R е *антирефлексивна*, ако $\forall a(\neg aRa)$.
- R е *симетрична*, ако $\forall a \forall b(aRb \to bRa)$.
- R е *антисиметрична*, ако $\forall a \forall b(aRb \land bRa \to a = b)$.
- R е *силно антисиметрична*, ако $\forall a \forall b\big(a \neq b \to ((aRb \land \neg bRa) \lor \neg(aRb \land bRa))\big)$.
- R е *транзитивна*, ако $\forall a \forall b \forall c(aRb \land bRc \to aRc)$.

"Изследвайте релацията R *за шестте свойства"* означава следното: за всяко от шестте изброени горе свойства, да се определи дали R притежава това свойство, или не.

Задача 5. Нека $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq |x| \leq 5\}$. Нека $B = A \setminus \{0, 5, 6, 7\}$. Нека $R \subseteq B \times B$ е дефинирана така: $xRy \leftrightarrow xy < 0$. Изследвайте R за шестте свойства.

Решение: Лесно се вижда, че $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. Числото x е в релация R с числото y тогава и само тогава, когато произведението им е отрицателно.

- Релацията е антирефлексивна, защото никое реално число, умножено със себе си, не дава отрицателен резултат.
- Веднага следва, че релацията не е рефлексивна.
- Релацията е симетрична поради комутативността на умножението.
- Релацията не е антисиметрична, защото съществува поне една двойка различни елементи, да кажем $x = -1$ и $y = 1$, такива че xRy и yRx, а наличието на поне една такава двойка е несъвместимо с антисиметричността.
- Щом не е антисиметрична, то тя не е и силно антисиметрична, тъй като силната антисиметричност е частен случай на антисиметричността.
- Релацията не е транзитивна, защото съществуват x, y и z, такива че xRy и yRz, но $\neg xRz$, например $x = -1$, $y = 1$ и $z = -2$. □

Дадена крайна релация може да се опише в явен вид по три начина. Може да се изброят в явен вид наредените двойки, които ѝ принадлежат, може да се състави матрицата ѝ (което е същото нещо, написано по-кратко и прегледно), и може да се нарисува диаграмата ѝ.

Задача 6. Нека $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$. Опишете в явен вид релацията R и по трите начина, ако R е дефинирана така: за всеки a и b от A, aRb тогава и само тогава, когато

1. $a = b$
2. $a \neq b$
3. $a + b = 2$
4. $a * b = 2$
5. $\exists k \in \mathbb{N}(a + b = 2k)$
6. a дели b
7. a и b са взаимно прости[†]

[†]Две естествени числа m и n, такива че $m \geq 2$ и $n \geq 2$, са *взаимно прости*, ако единственото цяло положително число, което ги дели и двете, е единицата.

Решение: Ще решим 5. Преведено на естествен език, условието казва, че всеки два елемента са в релация тогава и само тогава, когато сумата им е четно (неотрицателно) число.

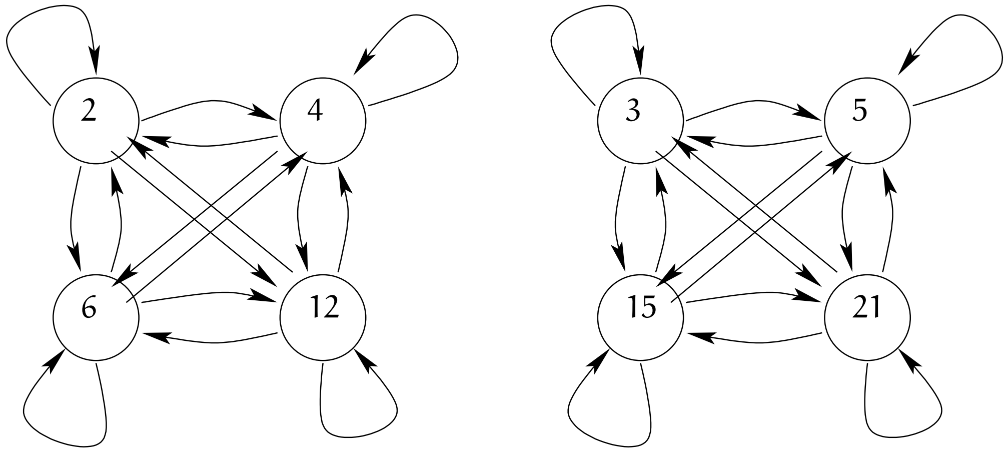
Първи начин

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,12),(3,3),(3,5),(3,15),(3,21),(4,2),(4,4),(4,6),(4,12),\\ (5,3),(5,5),(5,15),(5,21),(6,2),(6,4),(6,6),(6,12),(12,2),(12,4),(12,6),(12,12),\\ (15,3),(15,5),(15,15),(15,21),(21,3),(21,5),(21,15),(21,21)\}$$

Втори начин (нулите не са написани)

	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1		1		1	1		
3		1		1			1	1
4	1		1		1	1		
5		1		1			1	1
6	1		1		1	1		
12	1		1		1	1		
15		1		1			1	1
21		1		1			1	1

Трети начин



Задача 7. За всяка от релациите от Задача 6, изследвайте релацията за шестте свойства.

Решение: Ще изследваме 7.

- Релацията не е рефлексивна, понеже всяко от числата е различно от 1 и се дели на себе си.

- Релацията е антирефлексивна – по същата причина, а именно, че никое от числата не е взаимно просто със себе си.

- Релацията е симетрична, тъй като за всяко цяло положително число k, това число или е общ делител на две числа m и n, или не е. Дали казваме "на m и n" или "на n и m", няма значение.

  По-формално можем да кажем същото нещо така. Нека $Q(m, n, k)$ е триместен предикат, в който домейните на първата и втората променлива са $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, а на третата променлива е $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (тоест $\mathbb{N}^+$). Нека $Q(m, n, k)$ е истина тогава и само тогава, когато k е общ делител на m и n. Нека $P(m, n)$ е предикатът "m и n са взаимно прости" с домейни $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Предикатът $P(m, n)$ можем да изразим така:

  $$P(m, n): \quad \forall k(Q(m, n, k) \rightarrow k = 1)$$

  Тъй като $\forall m \forall n \forall k(Q(m, n, k) \leftrightarrow Q(n, m, k))$, то релацията е симетрична.

- Релацията не е антисиметрична, понеже можем да посочим поне две числа x и y от дадените, такива че xRy и yRx, примерно 2 и 4.

- Релацията не е силно антисиметрична, понеже е симетрична (симетричността и силната антисиметричност са несъвместими).

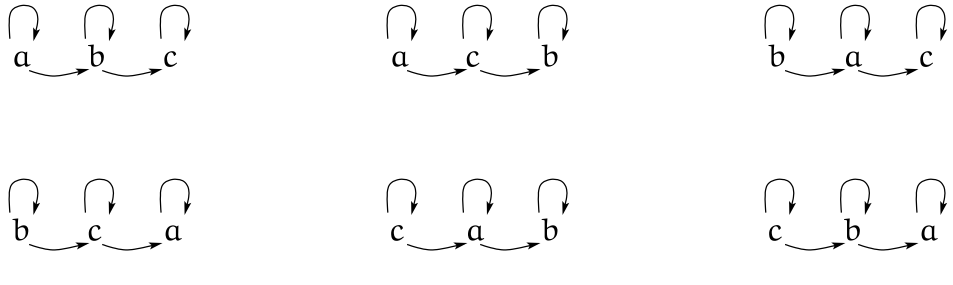
- Релацията не е транзитивна. Като контрапример: 6 и 5 са взаимно прости, 5 и 21 са взаимно прости, но 6 и 21 не са (имат общ делител 3).

Задача 8. Нека $R_> = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a > b\}$. Нека релациите $R_\geq$, $R_<$, $R_\leq$, $R_=$, $R_\neq$ са аналогичните релации с очевидния смисъл на индексите. Опишете колкото е възможно по-просто и естествено следните релации:

а) $R_> \cup R_<$ **б)** $R_> \cup R_=$ **в)** $R_\geq \cap R_\leq$ **г)** $R_> \setminus R_\geq$ **д)** $R_\geq \setminus R_>$
е) $R_< \cup R_=$ **ж)** $R_> \triangle R_<$ **з)** $R_> \triangle R_<$ **и)** $R_\geq \cup R_\leq$ **й)** $R_< \cup R_\neq$
к) $R_< \cap R_\neq$ **л)** $R_\leq \cap R_\neq$ **м)** $R_\leq \setminus R_\neq$ **н)** $R_\neq \setminus R_\leq$ **о)** $R_\geq \triangle R_\neq$ **п)** $R_< \triangle R_=$

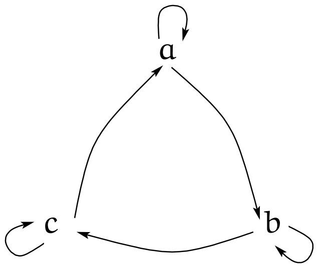
Задача 9. Нека $S = \{a, b, c\}$. Напишете *в явен вид* всички релации $R \subseteq S \times S$, които са рефлексивни и антисиметрични и *не са* транзитивни. Опишете релациите чрез диаграми и чрез булеви матрици.

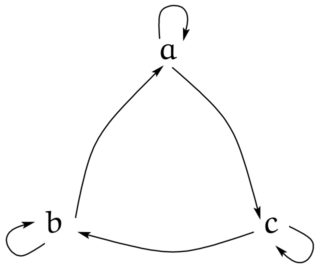
Решение: Първо съобразяваме, че следните шест релации, описани чрез диаграми, са рефлексивни и антисиметрични, но не са транзитивни:



Че не са транзитивни, следва директно от дефиницията на транзитивност. Примерно, за да е транзитивна първата посочена релация, би трябвало да има и стрелка от a до c.

Това обаче не са всички нетранзитивни, рефлексивни и антисиметрични, релации. Има още две:





Примерно, за да е транзитивна първата от тях, щом a е в релация с b и b е в релация с c, би трябвало a да е в релация с c.

Същите осем релации, описани с матрици (в същия ред, в който вече ги описахме с диаграми), са:

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c			1

	a	b	c
a	1		1
b		1	
c		1	1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c			1

	a	b	c
a	1		
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	
c	1		1

	a	b	c
a	1		
b	1	1	
c		1	1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c		1	1

$\square$

Задача 10. Колко релации $R \subseteq A \times A$, където A е крайно множество с n елемента, са:

1. рефлексивни?
2. антирефлексивни?
3. симетрични?
4. антисиметрични?
5. силно антисиметрични?
6. симетрични и антисиметрични?
7. симетрични и силно антисиметрични?

8. симетрични и рефлексивни?
9. антисиметрични и нито рефлексивни, нито антирефлексивни?
10. антисиметрични и силно антисиметрични?

Задача 11. Колко транзитивни релации има над n елементно множество, ако

1. $n = 1$?
2. $n = 2$?
3. $n = 3$?

Задача 12. Нека R и S са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако R и S са транзитивни, то $R \triangle S$ е транзитивна.

Решение: Твърдението не е вярно. Като контрапример, разгледайте $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ и $S = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$. Очевидно и двете релации са транзитивни. Но релацията $R \triangle S = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$ не е транзитивна – за да бъде транзитивна, трябва да съдържа (a, d). $\square$

Задача 13. Нека Q и T са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако T е антисиметрична, а Q е силно антисиметрична, то $\overline{T \setminus Q}$ е антисиметрична.

Решение: Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека $T = \{(a, b)\}$ и $Q = \{(a, b)\}$. Очевидно и двете са антисиметрични. Очевидно Q е силно антисиметрична. Но $T \setminus Q = \emptyset$, следователно $\overline{T \setminus Q} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$, която релация не е антисиметрична, тъй като съдържа (a, b) и (b, a). $\square$

Определение 2. Дадена е произволна релация $R \subseteq A \times A$.

- *Рефлексивното затваряне* на R е минималната по включване релация, която е надмножество на R и е рефлексивна.
- *Симетричното затваряне* на R е минималната по включване релация, която е надмножество на R и е симетрична.
- *Транзитивното затваряне* на R е минималната по включване релация, която е надмножество на R и е транзитивна.

Задача 14. Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

Намерете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на R.

Определение 3. Релация $R \subseteq A \times A$ се нарича *релация на еквивалентност*, ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Задача 15. За всяко цяло положително число n, I_n е множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нека S е множеството от всички релации над I_5. Нека $R \subseteq S \times S$ е релация, дефинирана така:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат един и същи брой елементи}\}$$

Докажете, че R е релация на еквивалентност. Колко класа на еквивалентост има R?

Задача 16. За всяко естествено число n, J_n е множеството $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Нека $A = \{2^n \mid n \in J_5\}$. Нека $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ е релация, дефинирана така:

$$R = \Big\{\big((a, b), (c, d)\big) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid ac = bd \vee ad = bc\Big\}$$

Колко елемента има R? Напишете в явен вид R чрез матрицата ѝ. Докажете, че R е релация на еквивалентност. Кои са класовете на еквивалентност на R?

Задача 17. Нека $D = \{0, 1, 2\}$ и нека $R \subseteq D^3 \times D^3$ е релацията:

$$(a, b, c)R(x, y, z) \leftrightarrow ac \equiv xz \pmod 3$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Намерете броя на класовете на еквивалентност на R

в) Намерете броя на елементи във всеки клас на еквивалентност на R.

Решение:

а) Ще докажем, че R е рефлексивна. Наистина, всяка наредена тройка $(a, b, c) \in D^3$ е в релация със себе си, понеже $ac \equiv ac \pmod 3$ от рефлексивността на релацията еквивалентност по модул. ✓

Ще докажем, че R е симетрична. Наистина, ако за две наредени двойки $(a, b, c), (x, y, z) \in D^3$ е вярно, че $(a, b, c)R(x, y, z)$, то по дефиниция това означава, че $ac \equiv xz \pmod 3$. Но тогава $xz \equiv ac \pmod 3$ от симетричността на релацията еквивалентност по модул, което означава, че $(x, y, z)R(a, b, c)$. ✓

Ще докажем, че R е транзитивна. Наистина, ако за три наредени двойки (a, b, c), $(x, y, z), (\alpha, \beta, \gamma) \in D^3$ е вярно, че $(a, b, c)R(x, y, z)$ и $(x, y, z)R(\alpha, \beta, \gamma)$, то по дефиниция това означава, че $ac \equiv xz \pmod 3$ и $xz \equiv \alpha\gamma \pmod 3$. Но тогава $ac \equiv \alpha\gamma \pmod 3$ от транзитивността на релацията еквивалентност по модул, което означава, че $(a, b, c)R(\alpha, \beta, \gamma)$. ✓

б) Добре известно е, че има три възможни остатъка при делене на три, а именно 0, 1 и 2. Всеки клас на еквивалентност на R се определя от остатъка при делене на три на произведението от първия и третия елемент. Множеството от тези произведения е $\{0, 1, 2, 4\}$. Тогава множеството от остатъците е точно $\{0, 1, 2\}$. Следователно, класовете на еквивалентност са точно три.

в) Наредените тройки, произведението на първия и третия елемент от които дава остатък 0 при делене на 3 са точно тези, които имат 0 на първа или трета позиция, без значение на елемента на втора позиция. Тези, които имат 0 на първа позиция, са 9 на брой, защото по толкова начина може да запълним другите две позиции (на всяка може три различни елемента). Аналогично, тези, които имат 0 на третата позиция, са също 9. Тройките, които имат 0 и на първа, и на трета позиция, са 3 на брой. Съгласно принципа на включването и изключването, отговорът е $9 + 9 - 3 = 15$.

Наредените тройки, произведението на първия и третия елемент от които дава остатък 1 при делене на 3 са точно тези, които имат

① 1 на първа и на трета позиция. Те са 3 на брой.

② 2 на първа и на трета позиция. Те са 3 на брой.

Общо това са 6 наредени тройки.

Наредените тройки, произведението на първия и третия елемент от които дава остатък 2 при делене на 3 са точно тези, които имат

① 1 на първа и 2 на трета позиция. Те са 3 на брой.

② 2 на първа и 1 на трета позиция. Те са 3 на брой.

Общо това са 6 наредени тройки.

И така, класовете на еквивалентност за остатъци 0, 1 и 2 имат съответно 15, 6 и 6 елементи. □

Задача 18. Дадени са две релации на еквивалентност $R_1 \subseteq A \times A$ и $R_2 \subseteq A \times A$ над крайно множество A. За всяка от следните три релации:

а) $R_1 \cap R_2$,

б) $R_1 \cup R_2$,

в) $R_1 \triangle R_2$

определете дали тя е релация на еквивалентност. Обосновете добре отговорите си.

Решение: $R_1 \cap R_2$ е релация на еквивалентност, което сега ще докажем.

- Щом R_1 и R_2 са рефлексивни, всяка от тях съдържа наредените двойки (a, a), по всички елементи $a \in A$. Тогава сечението им също съдържа всички тези двойки, тоест $\forall a \in A : (a, a) \in R_1 \cap R_2$. Следователно, сечението е рефлексивна релация.

- Да разгледаме произволни $a, b \in A$, такива че $a \neq b$. Тъй като R_1 е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

  Случай 1 $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$.

  Случай 2 $(a, b) \notin R_1 \wedge (b, a) \notin R_1$.

  Тъй като R_1 е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

Случай 3 $(a, b) \in R_2 \wedge (b, a) \in R_2$.

Случай 4 $(a, b) \notin R_2 \wedge (b, a) \notin R_2$.

Ако **Случай 1** и **Случай 3** са истина, то $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \in R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 1** и **Случай 4** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 2** и **Случай 3** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Ако **Случай 2** и **Случай 4** са истина, то $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$. Тъй като тези комбинации от случаи са изчерпателни, то или и двете наредени двойки (a, b) и (b, a) са в сечението, или и двете не са. Следователно, сечението е симетрична релация.

- Да разгледаме произволни три елемента $a, b, c \in A$. Тъй като R_1 е транзитивна, то

$$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \rightarrow (a, c) \in R_1 \tag{1}$$

Аналогично,

$$(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \rightarrow (a, c) \in R_2 \tag{2}$$

Нека p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 са съжденията

- p_1: $(a, b) \in R_1$,
- q_1: $(b, c) \in R_1$,
- r_1: $(a, c) \in R_1$,
- p_2: $(a, b) \in R_2$,
- q_2: $(b, c) \in R_2$,
- r_2: $(a, c) \in R_2$.

Ако преведем (1) и (2) на езика на съждителната логика, (1) е

$$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 \tag{3}$$

а (2) е

$$p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 \tag{4}$$

И двете са изпълнени, следователно в сила е тяхната конюнкция. Това, което искаме да докажем за $R_1 \cap R_2$, е а именно, че е транзитивна, на езика на съждителната логика е

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2) \tag{5}$$

Ще докажем, че импликацията

$$((p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_1)) \rightarrow ((p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2)) \tag{6}$$

е тавтология. Понеже броят на съжденията е 6, доказателство с таблица не е практично. Можем да разсъждаваме така: какво трябва да е изпълнено за съжденията в импликацията в (6), така че импликацията да е лъжа? Знаем, че импликация е лъжа тогава и само тогава, когато антецедентът е истина, а консеквентът е лъжа. Да видим кога консеквентът е лъжа. Прилагаме свойствата на импликацията (понеже самият консеквент е импликация) и законите на Де Морган към консеквента на (6) и получаваме, че е еквивалентен на

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee (r_1 \wedge r_2)$$

За да бъде лъжа, трябва p_1, p_2, q_1, q_2 да са истина, а поне едно от r_1 и r_2 е лъжа. Ако заместим съжденията в антецедента на (6) с тези логически стойности, ще получим, че

$p_1 \wedge q_1 \to r_1$ или $p_2 \wedge q_2 \to r_2$ е лъжа

Но тогава и антецедентът е лъжа. Доказахме, че при единствената възможна стойност на съжденията, такава че консеквентът е лъжа, антецедентът също е лъжа. Следователно, при тези стойности на участващите прости съждения, цялата импликация в (6) е истина. Доказахме, че импликацията в (6) е истина за всички възможности за истина/лъжа на участващите прости съждения. Тоест, тя е тавтология.

Следователно, $R_1 \cap R_2$ е транзитивна.

$R_1 \cup R_2$ не е релация на еквивалентност. За да докажем това, достатъчно е да покажем две *конкретни* релации на еквивалентност R_1 и R_2, такива че обединението им не е релация на еквивалентност. Забележете разликата с предното доказателство: по отношение на него *не е* достатъчно да покажем, че за две конкретни релации на еквивалентност, тяхното сечение също е релация на еквивалентност! Причината е, че всъщност в тази задача доказваме твърдения от вида

> за всяка релация на еквивалентност R_1, за всяка релация на еквивалентност R_2, в сила е ...

Доказателството, че твърдението е вярно, не може да стане чрез разглеждане на конкретни релации, защото релациите на еквивалентност са безброй и няма как да проверим верността на твърдението с разглеждане на конкретни релации. Обаче доказателството, че твърдението не е вярно, може да стане чрез разглеждане на само две конкретни релации, за които твърдението е лъжа. Такава двойка релации се нарича *контрапример*. За да се убедим, че един контрапример е достатъчен, може да образуваме отрицанието на посоченото твърдение и да съобразим, че тогава двата универсални квантора стават екзистенциални.

И така, контпрапример е $A = \{a, b, c, d\}$,

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$

и

$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (d, d), (a, b), (a, d), (b, a), (b, d), (d, a), (d, b)\}$$

Лесно се вижда, че обединението им не е релация на еквивалентост, защото не е транзитивна: тя съдържа (c, a) и (a, d), но не съдържа (c, d).

$R_1 \triangle R_2$ също не е релация на еквивалентност. Контрапример е $A = \{a\}$ и $R_1 = \{(a, a)\}$, $R_2 = \{(a, a)\}$. Очевидно $R_1 \triangle R_2 = \emptyset$ не е рефлексивна. $\square$

Задача 19. Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Нека $R \subseteq A \times A$ и $R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$. Определете минималната по включване релация $S \subseteq A \times A$, такава че $R \cup S$ е релация на еквивалентност.

Решение: $S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}$. $\square$

Задача 20. Определението на "релация на еквивалентност" е "релация от вида $R \subseteq A \times A$, която е рефлексивна, симетрична и транзитивна". Професор Дълбоков казва, че в това определение има излишък. Той твърди, че ако R е симетрична и транзитивна, тя задължително е рефлексивна. Професорът се аргументира така.

> *Нека R е симетрична и транзитивна. Разглеждаме произволен елемент $x \in A$. Нека y е произволен елемент от A, такъв че xRy. Но щом R е симетрична и xRy, то yRx. Тогава е вярно, че xRy и yRx. Щом R е транзитивна и е вярно, че xRy и yRx, то xRx. Щом за произволен $x \in A$ е вярно, че xRx, то R е рефлексивна.*

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Доказателството е невалидно. Може да не съществува y, такъв че xRy, и тогава е възможно $(x, x) \notin R$. С други думи, може релацията да е симетрична и транзитивна и да има елемент x, който не е в нито една наредена двойка, поради което релацията не е рефлексивна. □

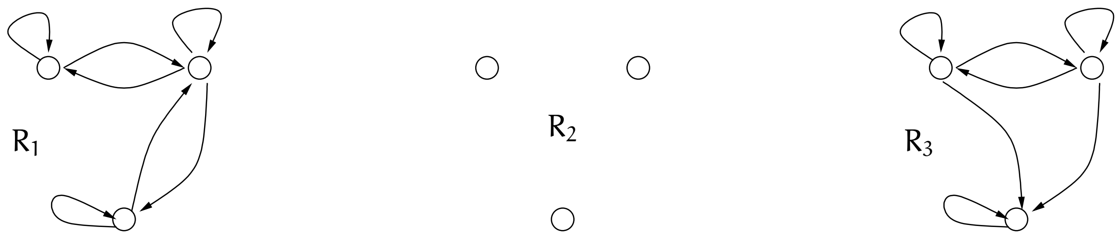
Задача 21. Тази задача е обобщение на Задача 20. Професор Дълбоков твърди, че в дефиницията на понятието *релация на еквивалентност* има излишък. Професорът казва:

> Едно от трите свойства в дефиницията на *релация на еквивалентност* е излишно! Ако от дефиницията изпуснем това свойство, ще получим дефиниция, еквивалентна на дадената!

Прав ли е професорът, или не?

Решение: Професорът греши. Нито едно от трите свойства не се имплицира от останалите две. За да се убедим в това, достатъчно е да демонстрираме:

- релация R_1, която е рефлексивна и симетрична, но не е транзитивна;
- релация R_2, която е транзитивна и симетрична, но не е рефлексивна;
- релация R_3, която е рефлексивна и транзитивна, но не е симетрична.



□

Определение 4. Нека $R \subseteq A \times B$ е двуместна релация. *Обратната релация на* R е релацията

$$R^{-1} = \{(a, b) \in B \times A \mid (b, a) \in R\}$$

Релацията-допълнение на R е релацията

$$\overline{R} = \{(a, b) \in A \times B \mid (a, b) \notin R\}$$

Задача 22. За всяка от следните дефиниции на релацията $R \subseteq A \times B$, намерете R^{-1} и $\overline{R}$. Символът "$\mathbb{R}$" означава множеството от реалните числа.

1. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $R = \{(a, b) \mid a < b\}$.
2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$.
3. A е множеството от държавите в Европа. B също е множеството от държавите в Европа. $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат обща граница}\}$.

Задача 23. Нека M е матрицата на някаква релация $R \subseteq A \times A$. Нека A е крайно множество с n елемента. Нека M има точно k единици. Нека M' и M'' са съответно матриците на R^{-1} и $\overline{R}$. Колко единици има в M'? Колко единици има в M''?

Задача 24. Нека $R \subseteq A \times A$ е произволна релация. Докажете, че R е симетрична тогава и само тогава, когато $R = R^{-1}$.

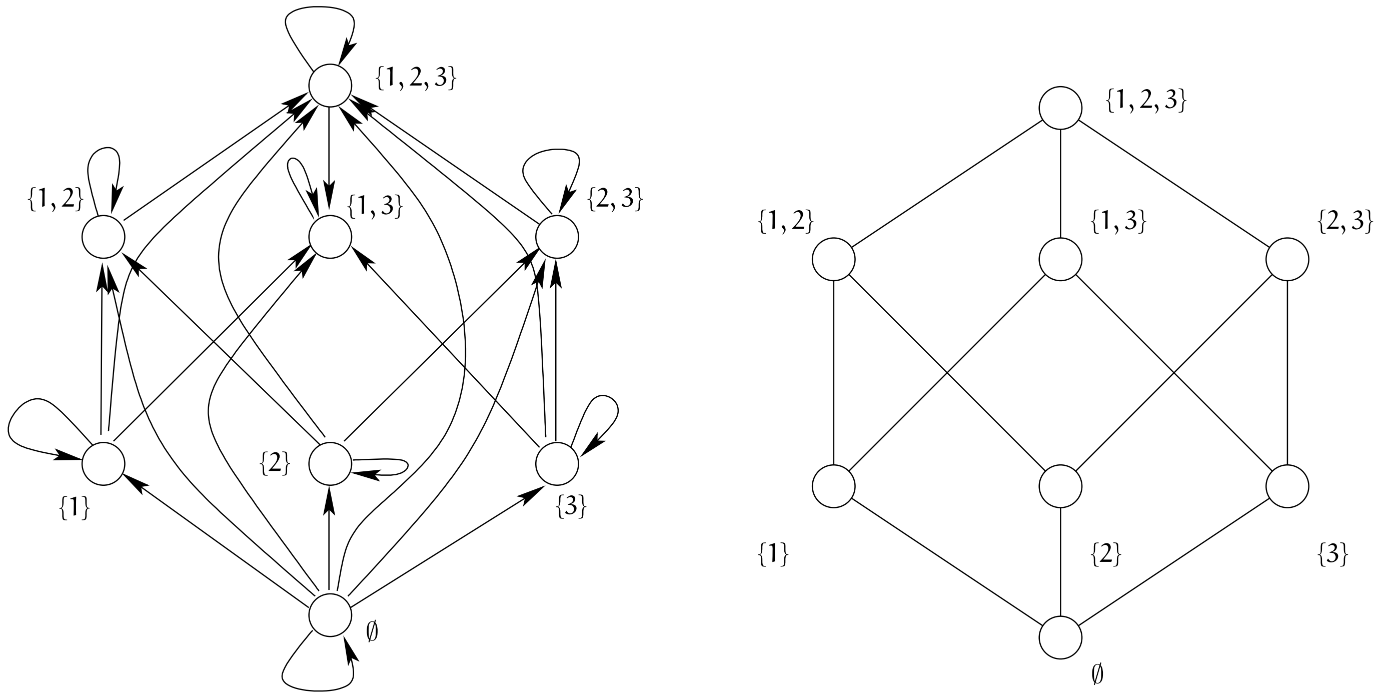
Задача 25. Нека $R \subseteq A \times A$ е произволна релация. Докажете, че R е антисиметрична тогава и само тогава, когато $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Решение: В едната посока, да допуснем, че R е антисиметрична. Ще докажем, че за произволна наредена двойка $(x, y) \in A \times A$, $(x, y) \in R \cap R^{-1} \rightarrow x = y$. Нека $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Тогава $(x, y) \in R$ и $(x, y) \in R^{-1}$, като последното е същото като $(y, x) \in R$ от дефиницията на R^{-1}. Тогава $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$. Прилагаме определението на "антисиметрична релация" и заключаваме, че $x = y$. Тогава всеки елемент на $R \cap R^{-1}$ е и елемент на $\{(a, a) \mid a \in A\}$. Тогава $R \cap R^{-1}$ е подмножество на $\{(a, a) \mid a \in A\}$.

В другата посока, нека $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$. Ще докажем, че R е антисиметрична. И по-точно, ще докажем, че за всяко наредена двойка $(x, y) \in A \times A$ е вярно, че ако $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, то $x = y$. Разглеждаме произволна $(x, y) \in A \times A$, такава че $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$. Но тогава $(x, y) \in R^{-1}$, така че $(x, y) \in R \cap R^{-1}$. Съгласно текущото допускане, (x, y) е елемент на $\{(a, a) \mid a \in A\}$. Но това е множеството от наредените двойки с един и същи първи и втори елемент. Тогава $x = y$. □

Определение 5. *Релация на частична наредба* $R \subseteq A \times A$ е всяка релация, която е рефлексивна, антисиматрична и транзитивна. В контекста на частичните наредби, за всяко $a \in A$ и всяко $b \in A$, a *и* b *са сравними*, ако поне едно от aRb и bRa е изпълнено, и са *несравними* в противен случай. *Диаграма на Hasse* е начин за графично представяне на крайни частични наредби, при който се рисува част от диаграмата на релацията:

- не се рисуват примките – тъй като релацията е рефлексивна, те се подразбират;
- не се рисуват ребра от вида (a, c), ако вече (a, b) и (b, c) присъстват – тъй като релацията е транзитивна, те се подразбират;



(а) Диаграмата на релацията. (б) Диаграмата на Hasse.

Фигура 1: Диаграмата и диаграмата на Hasse на релацията $R_{\subseteq A}$, където $A = \{1, 2, 3\}$.

- елементите се рисуват на ясно обособени нива. Прието е, минималните елементи да са най-долу, техните непосредствени съседи на следващото ниво нагоре и т. н., като максималните елементи са най-горе. Поради това не се слагат посоки на ребрата, тъй като посоките се подразбират; ако започнем с минималните елементи долу и разполагаме другите нагоре, посоките на ребрата са отдолу нагоре.

□

Като пример вижте релацията $R_{\subseteq A}$ с множество $A = \{1, 2, 3\}$, изобразена на Фигура 1 веднъж с диаграма и веднъж с диаграма на Hasse. Очевидно, диаграмата на Hasse е много по-прегледна, тъй като показва същността на релацията без нищо излишно.

Задача 26. Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Определете в явен вид всички релации на частична наредба над A, в които a и b са минимални, а c и d не са сравними.

Решение: Въпросните релации са 16. За да се убедим в това, да разгледаме матриците им. Всяка от тези матрици има единици по главния диагонал, тъй като релациите са рефлексивни (Фигура 2).
Освен това, има нули в колоните на a и b (с изключение на клетките от главния диагонал), тъй като a и b са минимални (Фигура 3).

	a	b	c	d
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

Фигура 2: Релациите са рефлексивни.

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	
d	0	0		1

Фигура 3: a и b са минимални.

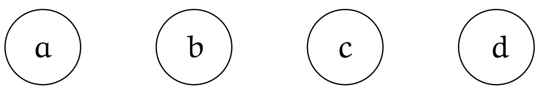
Освен това, има нули в клетките (c, d) и (d, c), тъй като c и d не са сравними (Фигура 4).

	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

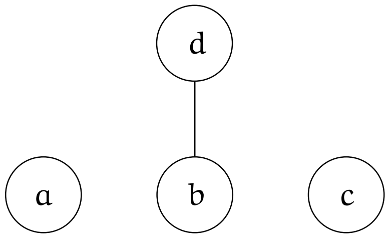
Фигура 4: c и d не са сравними.

Останалите 4 клетки могат да бъдат запълнени с нули и единици по $2^4 = 16$ различни начина, всеки от който съответства на една от търсените релации:

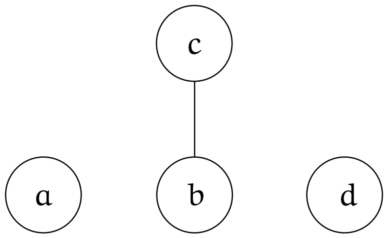
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



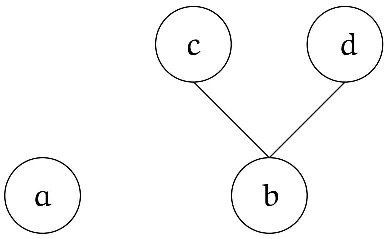
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



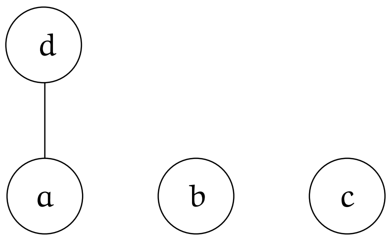
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



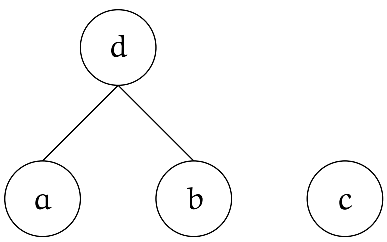
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



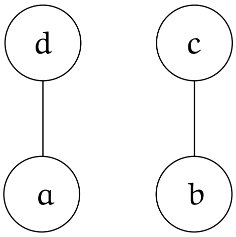
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



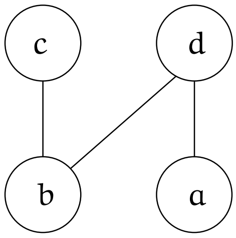
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



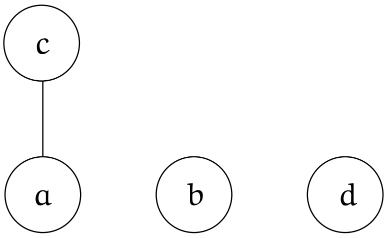
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



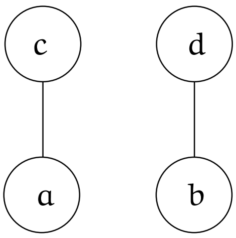
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



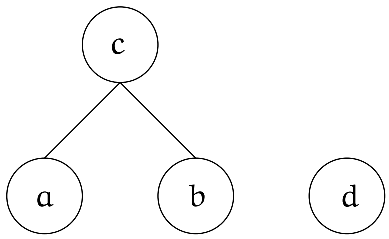
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



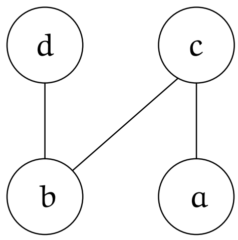
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



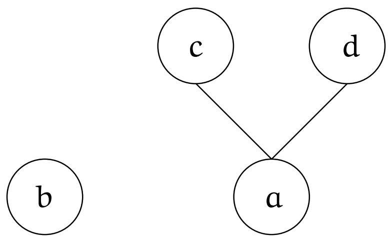
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



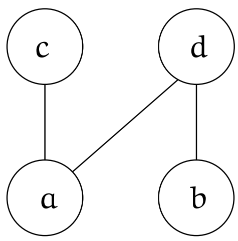
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



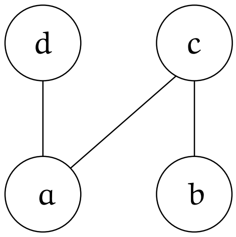
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



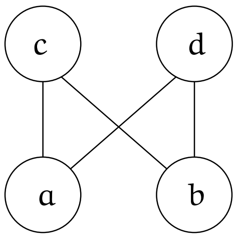
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



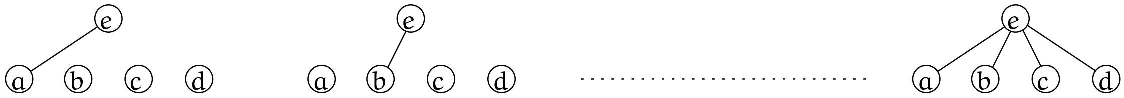
□

Задача 27. Дадено е множество $A = \{a, b, c, d, e\}$. Напишете в явен вид всички релации на частична наредба над A, в които елементите a, b и c са минимални. Релациите може да опишете или като множества от наредени двойки, или чрез диаграми, или чрез диаграми на Hasse.

Решение: Ще използваме диаграми на Hasse.

А. Има точно една релация, в която и петте елемента са миминални:

Б. Има точно петнадесет релации, в които точно e не е минимален:



Аналогично, има точно петнадесет релации, в които точно d не е минимален. Общо има точно тридесет релации, в които точно четири елемента са минимални, като a, b и c са измежду минималните.

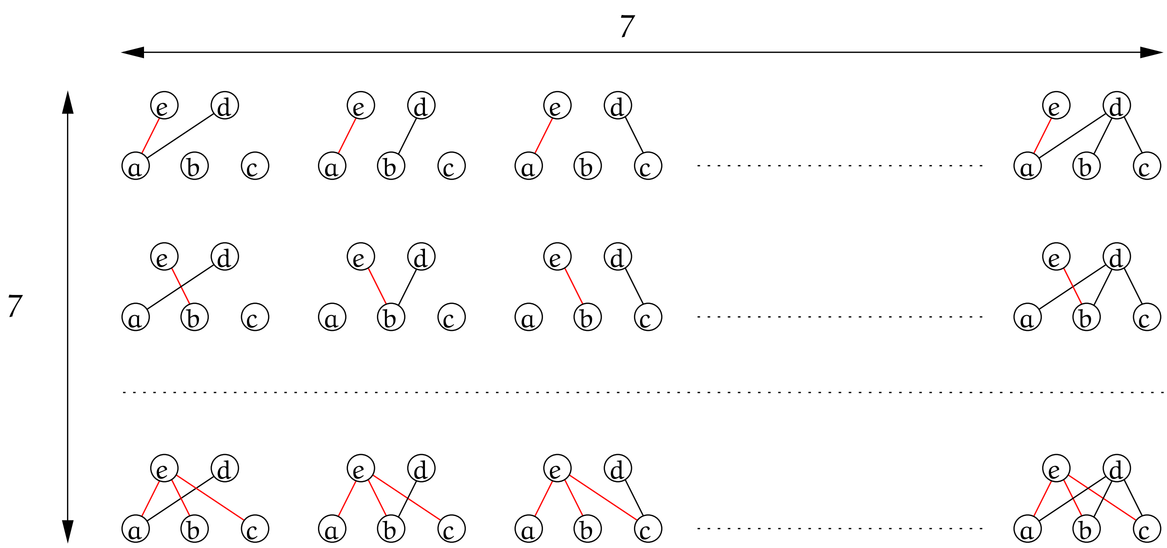
В. Да разгледаме релациите, в които точно a, b и c са минимални. Те се разбиват на тези, в които d и e не са сравними, и на тези, в които d и e са сравними.

В.1 Има точно $7 \times 7 = 49$ релации, в които точно a, b и c са минимални, а e и d са несравними. Причината е, че ако игнорираме d, има точно 7 релации, в които точно a, b и c са минимални:

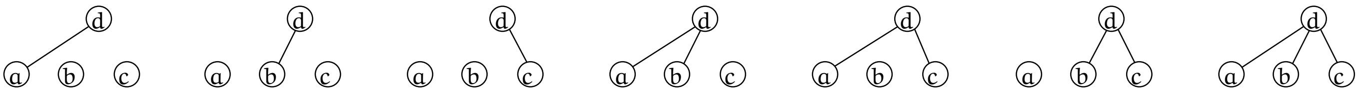
Да наречем множеството от тези релации, R_1. Аналогично, ако игнорираме e, има точно 7 релации, в които точно a, b и c са минимални.

Да наречем множеството от тях, R_2.

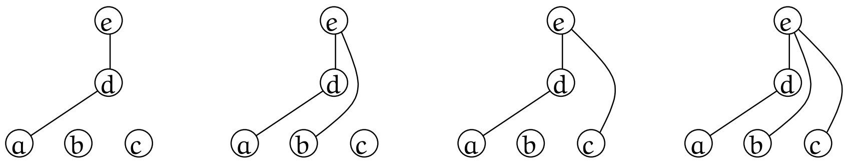
Всяка от релациите, в които точно a, b и c са минимални, а e и d са несравними, се получава чрез комбинирането на една релация от R_1 и една релация от R_2, като при комбинирането общите елементи (които са a, b и c) се идентифицират. Очевидно става дума за $7 \times 7 = 49$ релации:



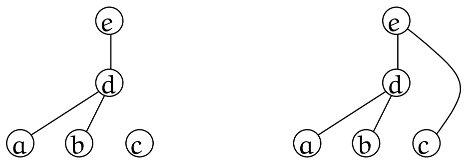
В.2 Сега да разгледаме релациите, в които точно a, b и c са минимални, а d и e са сравними. Първо ще разгледаме тези, в който d предхожда e. Те са 19 на брой, което получаваме със следните разсъждения. Има седем възможности за това, кои измежду a, b и c да предхождат d (e не е показан):



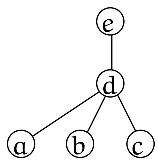
Елементът e може да бъде добавен по 4 начина към всяка от първите три възможности, примерно



Към всяка от вторите три възможности елементът e може да бъда добавен по два начина, примерно:



Към последната, седмата възможност, e може да бъде добавен по точно един начин:



И така, релациите, в които точно a, b и c са минимални, d и e са сравними и d предхожда e, са

$$4 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19$$

Очевидно тези релации, в които точно a, b и c са минимални, d и e са сравними и e предхожда d, са също 19. Общият брой на релациите в **В.2** е $19 + 19 = 38$. И общият брой на релациите в **В** е $49 + 38 = 87$.

Решението на задачата се получава чрез сумиране на подрешенията в **А**, **Б** и **В**, а именно

$$1 + 30 + 87 = 118$$

Това е броят на релациите, в които a, b и c са минимални.

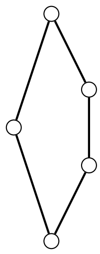
Задача 28. Намерете броя на релациите на частична наредба над $A = \{a, b, c, d, e\}$, които имат точно един минимален и точно един максимален елемент. Обосновете отговора си.

Решение: Да намерим всички диаграми на Hasse на тези релации без имена на върховете. Щом има точно един минимален и точно един максимален елемент, възможностите не са много. Останалите елементи са точно 3 и между тях съществуват $\binom{3}{2} = 3$ възможности за това, кой с кой е сравним.

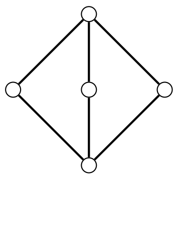
- Може всеки два да са сравними, тоест, да няма двойка, които не са сравними. Това означава, че диаграмата изглежда така:

- Може измежду останалите три елемента точно една двойка да не са сравними. Тук има две възможности: този, който е сравним с всеки от другите два, да е "под тях" или "над тях". Това означава, че има точно две различни възможности за диаграмата:

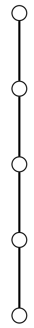
- Може измежду останалите три елемента точно две двойки да не са сравними, тоест, точно една двойка да са сравними. Това означава, че диаграмата изглежда така:



- Може измежду останалите три елемента точно три двойки да не са сравними, тоест, да няма двойка сравними елементи. Това означава, че диаграмата изглежда така:

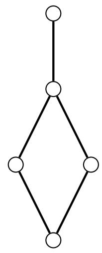


Тази диаграмата:



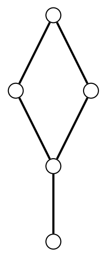
отговаря на $5! = 120$ частични наредби. Това са точно линейните наредби.

Тази диаграмата:



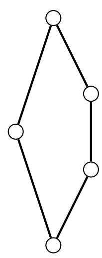
отговаря на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ частични наредби, защото по 5 начина можем да изберем максималния елемент, след неговия избор по 4 начина можем да изберем минималния, след тези два избора по 3 начина можем да изберем елемента непосредствено под максималния, и с това определяме наредбата еднозначно.

Тази диаграмата:



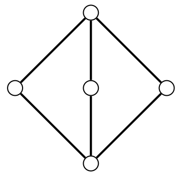
отговаря на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ частични наредби по аналогични съображения.

Тази диаграмата:



отговаря на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 20 = 120$ наредби, защото по 5 начина избираме максималния елемент, за всеки от тези избори по 4 начина избираме минималния елемент, за всеки от тези два избора по 3 начина избираме този от останалите, който не е сравним с никой друг от останалите, за всеки от тези избори по 2 начина определяме от останалите два кой е "отгоре", и това определя наредбата окончателно.

Тази диаграмата:



отговаря на $5 \cdot 4 = 20$ наредби, защото е достатъчно да определим максималния и минималния елемент, за да определим наредбата.

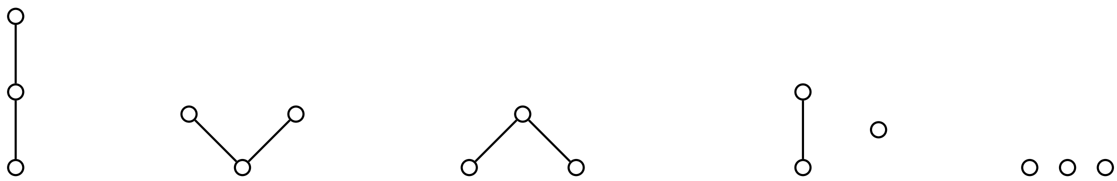
Отговорът е $120 + 60 + 60 + 120 + 20 = 380$. □

Задача 29. Нека $A = \{a, b, c, d\}$.

- Нарисувайте всички анонимни диаграми на Hasse на релации на частична наредба над A. "Анонимна диаграма на Hasse" означава диаграма на Hasse, в която върховете са неименувани. Щом върховете не са именувани, това, което отличава две диаграми на Hasse, е само фо́рмата им.

- Използвайки резултата от предното подусловие, намерете броя на частичните наредби над A.

Решение: Лесно е да нарисуваме някои диаграми на Hasse с 4 върха. Трудно е да сме сигурни, че сме нарисували всички диаграми на Hasse с 4 върха. Трябва да го правим систематично, за да е ясно, че не сме пропуснали диаграма. Има много начини за това. Един от тях е да започнем от петте неизоморфни диаграми на Hasse на 3 върха от лекции:



и към всяка да добавим нов връх, свързвайки го или не с вече сложените върхове по всички възможни начини според правилата за диаграма на Hasse, като след това от всеки клас получени изоморфни диаграми оставим само една.

Друг начин е да го направим от първи принципи. Ако мислим за диаграмите като за неориентирани графи, всяка от тях е свързана или не. При 4 върха сравнително трудно е да се конструират десетте свързани диаграми по начин, който не оставя съмнение, че може да има и друга свързана диаграма. Шестте несвързани диаграми са много по-очевидни. Тук ще подходим по този начин.

И така, сега конструираме **свързаните** диаграми с 4 върха. Знаем, че всяка диаграма има поне един минимален и поне един максимален елемент – това е тривиално следствие от факта, че всяка крайна частична наредба има поне един минимален и поне един максимален елемент, а диаграмите на Hasse са "окастрени" версии на диаграмите на частични наредби като ориентирани графи с примки. Да въведем понятието *сигнатура* на диаграма на Hasse като наредена двойка (p, q), където p е броят на минималните, а q е броят на максималните елементи. Щом върховете са четири и диаграмата е свързана, не може да има изолирани върхове; изолиран връх в контекста на диаграми на Hasse е елемент, който е минимален и максимален. Следователно, множеството от минималните елементи има празно сечение с множеството от максималните елементи. Следователно, ако сигнатурата е (p, q), то $p + q \leq 4$.

От друга страна, $2 \leq p + q$, понеже има минимален и има максимален. Тогава възможнстите за сигнатура са точно тези:

$$(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2)$$

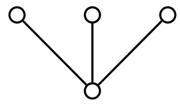
Да ги разгледаме в този ред.

- Сигнатура $(1,1)$. Двата елемента, които не са нито минимален, нито максимален, може да са сравними или да не са сравними помежду си, и съответно има точно две диаграми с такава сигнатура:

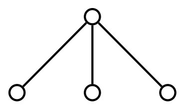
- Сигнатура $(2,1)$. Единственият елемент, който не е нито минимален, нито максимален, може да бъде сравним и с двата минимални или да е сравним само с единия минимален, и съответно има точно две диаграми с такава сигнатура:

- Сигнатура $(1,2)$. Поради дуалността минималност–максималност ситуацията е симетрична на предната и има точно две диаграми с такава сигнатура:

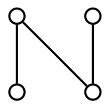
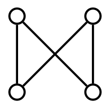
- Сигнатура $(1,3)$. Сега всеки елемент е или минимален, или максимален. Има точно една диаграма с такава сигнатура:



- Сигнатура $(3,1)$. От съображения за симетрия с предния случай, има точно една диаграма с такава сигнатура:

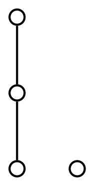
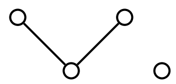
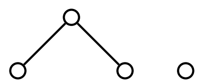


- Сигнатура $(2, 2)$. Всеки елемент е или минимален, или максимален, но има два минимални и два максимални. Очевидно единият минимален трябва да е сравним с единия максимален и другият минимален трябва да е сравним с другия максимален. Но ако няма други двойки сравними елементи, диаграмата няма да е свързана. А в момента разглеждаме само свързани диаграми. Поради това разбиваме само на два подслучая: или има един минимален и един максимален, които не са сравними, или всеки минимален е сравним с всеки максимален. Има точно две диаграми с такава сигнатура:

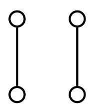



Конструирахме десетте свързани диаграми. Сега конструираме **несвързаните** диаграми. Те може да имат две, три или четири свързани компоненти.

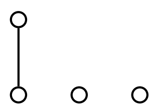
Конструираме диаграмите с две свързани компоненти. Те се разбиват на диаграмите, в които едната компонента има три елемента (което влече наличие на изолиран елемент) и на тези, в които всяка компонента е с два елемента. Диаграмите с изолиран елемент са точно тези:

Има само една диаграма с двуелементни компоненти:



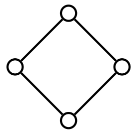
Има само една диаграма с три компоненти:



Има само една диаграма с четири компоненти:

Дотук намерихме шестнадесет диаграми на Hasse и се убедихме, че няма други. Сега да видим по колко съществено различни начина може да сложим имената на върховете във всяка от диаграмите на Hasse. "Съществено различни" означава, ако гледаме съответните диаграми на релации (те са ориентирани графи с примки), те да не са изоморфни като именувани графи след слагането на имената на върховете. Под всяка диаграма ще записваме броя на съществено различните именувания.

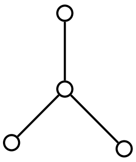
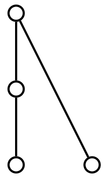
Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(1, 1)$.

24 **12**

За диаграмата вдясно има 4 възможности за минималния елемент, после 3 за елемента непосредствено над него и още 2 за третия отдолу нагоре; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. За диаграмата вдясно има 4 възможности за минималния и 3 за максималния и това определя релацията на пълно; общо $4 \cdot 3 = 12$.

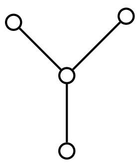
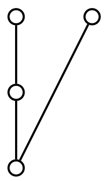
Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(2, 1)$.

12 **24**

За диаграмата вдясно има 4 възможности за максималния елемент и после 3 за елемента непосредствено под него; това определя релацията напълно, понеже останалите два елемента са несравними помежду си. За диаграмата вдясно има 4 възможности за максималния, после 3 за минималния, който го предшества непосредствено, и после още 2 за другия минимален и това определя релацията на пълно; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

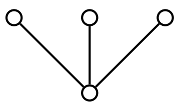
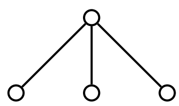
Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(1, 2)$.

12 **24**

Числата са 12 и 24 поради симетрията с предния случай.

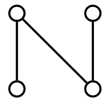
Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(1, 3)$ и $(3, 1)$.

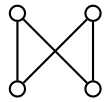
 

4 **4**

И в двата случая има точно четири съответни релации, защото изборът на минимален елемент вляво определя релацията напълно, а има 4 възможности за този избор; аналогично, изборът на максимален вдясно определя релацията напълно.

Да разгледаме диаграмите със сигнатура $(2, 2)$.





24 **6**

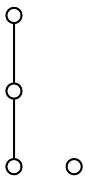
Всяка релация, съответна на диаграмата вляво, се определя напълно от максималния елемент, който е сравним с двата минимални, като има 4 възможности за него, после минималния, който е сравним с двата максимални, остават 3 възможности за него, и после другия минимален, за който остават 2 възможности; общо $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Всяка релация, съответна на диаграмата вдясно, се определя напълно от множеството от максималните елементи, а те може да бъдат избрани по $\binom{4}{2} = 6$ начина.

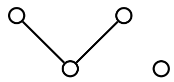
И така, свързаните диаграми на Hasse отговарят на

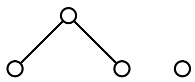
$$24 + 12 + 12 + 24 + 12 + 24 + 4 + 4 + 24 + 6 = 146$$

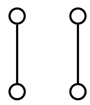
релации. Да видим колко релации съответстват на останалите диаграми на Hasse.

Да разгледаме диаграмите с две свързани компоненти.









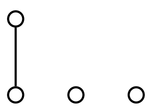
24 **12** **12** **12**

За диаграмата вляво, има 4 възможности за изолирания елемент и независимо от това има $3! = 6$ възможности за линейната наредба на останалите 3 елемента, откъдето общо са $4 \cdot 6 = 24$ възможности. За следващата диаграма има 4 възможности за изолирания елемент, а после изборът на минимален елемент за поддиаграмата с три елемента определя релацията напълно; възможностите са общо $4 \cdot 3 = 12$. За следващата възможностите са също 12 заради симетрията с предната. В последната диаграма, има два сравними елемента и още два сравними елемента, като между първата и втората група няма сравними елементи; двете групи нямат наредба помежду си, поради което възможностите за групиране са $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$; алтернативно извеждане е това: елементът, който е максималния в една от групите, може да се групира с всеки от 3-те други елементи и това дава 3 възможни групирания; във всяка група има 2 начина за избор на максимален, което определя кой е минималният, и тези начини са независими; ерго, общо възможностите са $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

За диаграмите с две свързани компоненти, броят на съответните релации е

$$24 + 12 + 12 + 12 = 60$$

Да разгледаме диаграмите с три и четири свързани компоненти.



12 **1**

Диаграмата вляво отговаря на 12 релации, защото по $\binom{4}{2} = 6$ начина можем да изберем сравнимите елементи и после по 2 начина можем да изберем максималния; общо това са $6 \cdot 2 = 12$ релации. Диаграмата вляво отговаря на само една релация, чийто граф е рефлексивното затваряне на диаграмата. И така, на диаграмите с три или четири свързани компоненти отговарят

$$12 + 1 = 13$$

релации. Оттук броят на частичните наредби над четириелементно множество е

$$146 + 60 + 13 = 219$$

□

Определение 6 (композиция на релации). Нека $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ са релации. Релацията $S \circ R$, която наричаме *композицията на* S *върху* R, дефинираме така:

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \,|\, \exists b \in B(aRb \wedge bSc)\}$$

Определение 7 (степените на релация). Нека $R \subseteq A \times A$ е релация. За всяко $n \in \mathbb{N}$ дефинираме релацията R^n, която наричаме R *на* n*-та степен*, по следния начин.

$$R^n = \begin{cases} \{(x, x) \,|\, x \in A\}, & \text{ако } n = 0, \\ R^{n-1} \circ R, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}$$

Задача 30. Докажете, че $R^1 = R$.

Решение: По дефиниция,

$$R^1 = \{(x, y) \in A \times A \,|\, \exists z \in A((x, z) \in R^0 \wedge (z, y) \in R)\}.$$

и

$$R^0 = \{(x, x) \,|\, x \in A\}$$

Тогава в дефиницията на R^1, двуместният предикат $\boxed{(x, z) \in R^0}$ е истина за, и само за, $z = x$. Оттук дефиницията на R^1 може да се опрости до

$$R^1 = \{(x, y) \in A \times A \,|\, (x, y) \in R\}.$$

Тогава $R^1 = R$. □

Задача 31. Докажете, че $R^0 \cup R^1$ е рефлексивното затваряне на R.

Решение: От Задача 30 знаем, че $R^1 = R$. По дефиниция, рефлексивното затваряне на R е минималната по включване релация $R' \subseteq A \times A$, която е рефлексивна и е надмножество на R. Ще докажем, че това е в сила за релацията $R^0 \cup R^1$, която, както вече доказахме, е $R^0 \cup R$. Първо, R^0 очевидно е рефлексивна, а оттам и $R^0 \cup S$ е рефлексивна за всяка бинарна релация S над A. В частност, $R^0 \cup R$ е рефлексивна. Второ, $R^0 \cup R$ се явява надмножество на R. Трето, това е минималната релация с тези свойства, защото за всяка $S \subset R^0 \cup R$, или S не е рефлексивна, или е строго подмножество на R. □

Задача 32. Нека $R \subseteq \{1,2,3,4\}^2$ е дефинирана така: $R = \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}$. Намерете R^n за $n \in \mathbb{N}^+$.

Решение: Лесно се съобразява, че

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\} \\ R^2 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\} \\ R^3 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\} \\ R^4 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\} \end{aligned}$$

Тъй като $R^4 = R^3$, очевидно че $R^5 = R^4$, $R^6 = R^5$, и т. н. Следователно,

$$\forall n \in \mathbb{N}(n > 4 \rightarrow R^n = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\})$$

Накратко, решението е:

$$R^i = \begin{cases} \{(1,1),(2,1),(3,2),(4,3)\}, & \text{ако } i = 1 \\ \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,2)\}, & \text{ако } i = 2 \\ \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}, & \text{ако } i \geq 3 \end{cases} \qquad \square$$

Задача 33. Докажете, че за всяка релация $R \subseteq A \times A$, R е транзитивна тогава и само тогава, когато $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$.

Решение, част I: Нека R е транзитивна.

Ще докажем по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$. Базата е за $n = 1$: очевидно, $R^1 \subseteq R$. Да допуснем, че $R^n \subseteq R$. Ще докажем, че $R^{n+1} \subseteq R$. Да разгледаме произволен елемент $(a,b) \in R^{n+1}$. Съгласно Определение 6, $\exists x \in A\big((a,x) \in R^n \wedge (x,b) \in R\big)$. От индуктивната хипотеза знаем, че $R^n \subseteq R$. Следователно, $(a,x) \in R$. Щом $(a,x) \in R$ и $(x,b) \in R$, то $(a,b) \in R$, тъй като R е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в R^{n+1}, то той е и в R.

Решение, част II: Нека $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$.

Ще докажем, че R е транзитивна. Тъй като $\forall n \in \mathbb{N}^+(R^n \subseteq R)$, в частност $R^2 \subseteq R$. Да разгледаме произволни елементи от A, да ги наречем a, b и c, такива че $(a,b) \in R$ и $(b,c) \in R$. Съгласно Определение 6, изпълнено е $(a,c) \in R^2$. Но $R^2 \subseteq R$. Следователно, $(a,b) \in R$. $\square$

Задача 34. Докажете или опровергайте, че ако R е релация на частична наредба, то R^{-1} е релация на частична наредба. Докажете или опровергайте, че ако R и Q са релации на частична наредба, то $R \circ Q$ е релация на частична наредба.

Решение: R^{-1} също е частична наредба:

- Ще докажем, че ако R е рефлексивна, то R^{-1} е рефлексивна. Нека R е рефлексивна. Тогава $\forall a \in A : (a,a) \in R$. Тогава $\forall a \in A : (a,a) \in R^{-1}$.

- Ще докажем, че ако R е антисиметрична, то R^{-1} е антисиметрична. Нека R е антисиметрична. Тогава $\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$. Но

$$\begin{aligned}
&\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b \equiv \\
&\neg\neg\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : \neg(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b) \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : \neg(\neg(aRb \wedge bRa) \vee a = b) \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : \neg\neg(aRb \wedge bRa) \wedge a \neq b \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : aRb \wedge bRa \wedge a \neq b
\end{aligned}$$

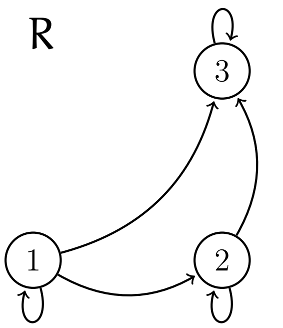
  Получихме резултат, който сме извеждали на лекции: релация да е антисиметрична е същото като да няма два различни елемента, всеки от които е в релация с другия. Очевидно е, че ако в R няма такива два елемента, то в R^{-1} също няма такива. С други думи, ако R е антисиметрична, то R^{-1} е антисиметрична.

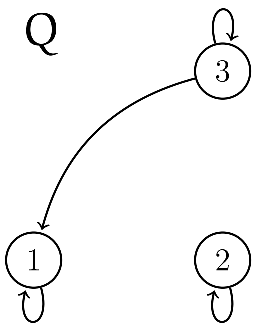
- Ще докажем, че ако R е транзитивна, то R^{-1} е транзитивна. Нека R е транзитивна. Тогава

$$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$$

  Разглеждаме произволни три, не непременно различни, елементи a, b, c от A, такива че $aRb \wedge bRc$. Ако няма такива, то R е транзитивна в празния смисъл, а също така и R^{-1}. Нека съществуват такива. Тогава $bR^{-1}a \wedge cR^{-1}b$. Заради комутативността на конюнкцията имаме право да напишем последното като $cR^{-1}b \wedge bR^{-1}a$. Щом R е транзитивна, то $aRb \wedge bRc$ влече aRc. Значи, aRc е в сила при това предположение. Но тогава $cR^{-1}a$. Следователно, $cR^{-1}b \wedge bR^{-1}a$ влече $cR^{-1}a$. Тогава R^{-1} е транзитивна.

Обаче $R \circ Q$ не е непременно частична наредба. Ето контрапример. Нека R и Q са следните релации над $\{1, 2, 3\}$.

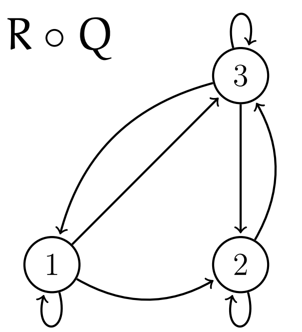




Очевидно R и Q са частични наредби. Да разгледаме $R \circ Q$.

$$\begin{aligned}
&1Q1 \wedge 1R1 && \rightarrow (1,1) \in R \circ Q \\
&1Q1 \wedge 1R2 && \rightarrow (1,2) \in R \circ Q \\
&1Q1 \wedge 1R3 && \rightarrow (1,3) \in R \circ Q \\
&\neg \exists x : 2Qx \wedge xR1 && \rightarrow (2,1) \notin R \circ Q \\
&2Q2 \wedge 2R2 && \rightarrow (2,2) \in R \circ Q \\
&2Q2 \wedge 2R3 && \rightarrow (2,3) \in R \circ Q \\
&3Q1 \wedge 1R1 && \rightarrow (3,1) \in R \circ Q \\
&3Q1 \wedge 1R2 && \rightarrow (3,2) \in R \circ Q \\
&3Q3 \wedge 3R3 && \rightarrow (3,3) \in R \circ Q
\end{aligned}$$

Ето как изглежда диаграмата на $R \circ Q$:



$R \circ Q$ има контури, така че тя не е частична наредба. □

Определение 8. Релация, която е рефлексивна и транзитивна, се нарича *преднаредба.*

Очевидно е, че симетрична преднаредба е същото като релация на еквивалентност, а антисиметрична преднаредба е същото като частична наредба.

Задача 35. Докажете, че ако R е преднаредба, то $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n = R)$.

Задача 36. Нека $R \subseteq A \times A$ е преднаредба. За всяко $a \in A$ дефинираме, че

$$[\![a]\!] = \{b \in A \mid aRb \wedge bRa\}$$

Докажете, че фамилията $\mathcal{F} = \{[\![a]\!] \mid a \in A\}$ е разбиване на A. Направете връзка между това доказателството и доказателството, направено на лекции в контекста на релации на еквивалентност, че $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A.

Решение: Първо забелязваме, че $\forall a \in A$ е вярно, че $a \in [\![a]\!]$, понеже в "$\{b \in A \mid aRb \wedge bRa\}$", b взема стойностите на всички елементи от A, а е казано, че R е рефлексивна. Тогава $[\![a]\!] \neq \emptyset$ за всяко $a \in A$. Дотук доказахме, че $\mathcal{F}$ е покриване на A.

Сега ще докажем, че $\mathcal{F}$ е разбиване. Тоест, че $[\![a]\!] \neq [\![b]\!] \rightarrow [\![a]\!] \cap [\![b]\!] = \emptyset$, за всички $a, b \in A$. Ще докажем контрапозитивното съждение:

$$[\![a]\!] \cap [\![b]\!] \neq \emptyset \rightarrow [\![a]\!] = [\![b]\!]$$

Разглеждаме произволни a и b от A, такива че $[\![a]\!] \cap [\![b]\!] \neq \emptyset$. Разглеждаме произволен $d \in [\![a]\!] \cap [\![b]\!]$. Щом $[\![a]\!] \cap [\![b]\!]$ е непразно, такъв d съществува. Разглеждаме произволен a_1 от $[\![a]\!]$ и произволен b_1 от $[\![b]\!]$. Щом $[\![a]\!]$ и $[\![b]\!]$ са непразни, такива a_1 и b_1 съществуват.

Първо ще покажем, че $a_1 \in [\![b]\!]$.

- По дефиниция, $[\![a]\!] = \{z \in A \mid aRz \wedge zRa\}$. Но $a_1 \in [\![a]\!]$. Тогава е вярно, че a_1Ra. Знаем, че $d \in [\![a]\!]$. Тогава е вярно, че aRd. Щом a_1Ra и aRd и R е транзитивна, вярно е, че a_1Rd. Знаем, че $d \in [\![b]\!]$. Тогава е вярно, че dRb. Щом a_1Rd и dRb и R е транзитивна, вярно е, че a_1Rb.
- Щом $d \in [\![b]\!]$, вярно е, че bRd. Знаем, че $d \in [\![a]\!]$, следователно dRa. От това, че bRd и dRa и R е транзитивна следва, че bRa. Знаем, че $a_1 \in [\![a]\!]$, така че aRa_1. От това, че bRa и aRa_1 и R е транзитивна следва, че bRa_1.

Щом a_1Rb и bRa_1, вярно е, че $a_1 \in [\![b]\!]$. Но щом произволен елемент от $[\![a]\!]$, а именно a_1, е елемент на $[\![b]\!]$, вярно е, че $[\![a]\!] \subseteq [\![b]\!]$.

Напълно аналогично се показва, че $b_1 \in [\![a]\!]$. Но щом произволен елемент от $[\![b]\!]$, а именно b_1, е елемент на $[\![a]\!]$, вярно е, че $[\![b]\!] \subseteq [\![a]\!]$.

Тогава $[\![a]\!] \subseteq [\![b]\!]$ и $[\![b]\!] \subseteq [\![a]\!]$. От аксиомата за обема следва, че $[\![a]\!] = [\![b]\!]$.

Ето връзката с резултата от лекции, че $\{[a] \mid a \in A\}$. Преднаредба, която е и симетрична, е релация на еквивалентност. Ясно се вижда, че $[\![a]\!]$ е същото като $[a]$, ако R е и симетрична, понеже aRb влече bRa, когато R е симетрична. Ерго, доказаната на лекции теорема, гласяща "фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A", е частен случай на това, което доказахме за $\mathcal{F}$. $\square$

Определение 9. За всяка преднаредба $R \subseteq A \times A$, казваме, че *класовете на еквивалентност* на R са елементите на фамилията

$$\{[\![a]\!] \mid a \in A\}$$

където нотацията "$[\![a]\!]$" има смисъла от Задача 36, а именно

$$[\![a]\!] = \{b \in A \mid aRb \wedge bRa\}$$

В Задача 36 показахме, че фамилията $\{[\![a]\!] \mid a \in A\}$ е разбиване на A. Следователно, класовете на еквивалентност на преднаредба представляват разбиване на домейна, точно както класовете на еквивалентност на релация на еквивалентност представляват разбиване на домейна. Прочее, ако преднаредбата е симетрична, тя е релация на еквивалентност и нейните класове на еквивалентност според Определение 9 съвпадат точно с нейните класове на еквивалентност според дефиницията на класове на еквивалентност от лекции.

Задача 37. Дадено е крайно непразно множество A и релация $R \subseteq 2^A \times 2^A$, дефинирана така:

$$\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R \text{ тогава и само тогава, когато } |X| \leq |Y|$$

Изследвайте R за шестте свойства. Какъв вид релация е R, според изучаваните видове релации?

Решение: R е рефлексивна, понеже всяко подмножество на A има същата мощност като себе си, така че $|A| \leq |A|$ за всяко можество A. R не е антирефлексивна по същата причина. R не е симетрична, понеже ако две множества A и B е вярно, че $|A| \leq |B|$, от това не следва непременно, че $|B| \leq |A|$. R не е антисиметрична, защото има двойки различни подмножества на A с една и съща мощност. R не е силно антисиметрична по същата причина. R е транзитивна, защото ако едно множество има мощност не по-голяма от мощността на друго множество, а другото, не по-голяма мощност от мощността на трето множество, то първото има не по-голяма мощност от мощността на третото.

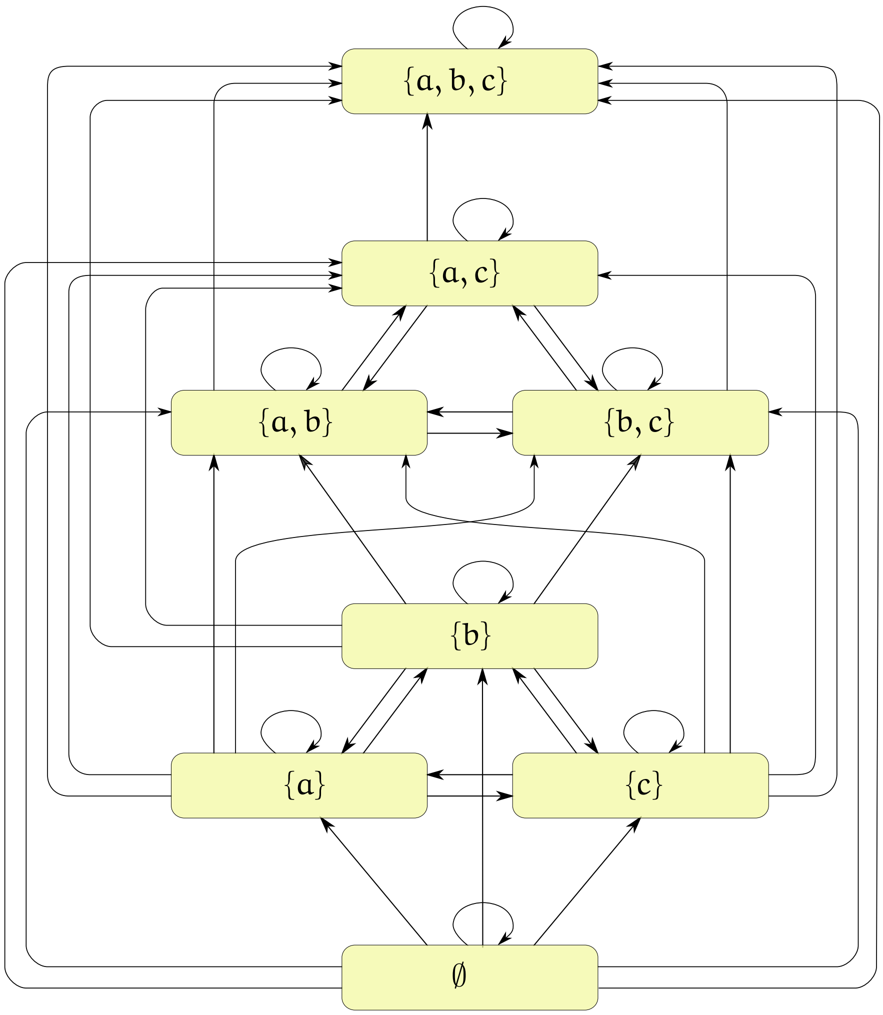
R е преднаредба, понеже е рефлексивна и транзитивна. R не е релация на еквивалентност, понеже не е симетрична. R не е частична наредба, понеже не е антисиметрична. □

Задача 38. Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $R \subseteq 2^A \times 2^A$ е дефинирана така:

$$\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R \text{ тогава и само тогава, когато } |X| \leq |Y|.$$

Съгласно Задача 37, R е преднаредба. Нарисувайте диаграмата на R и намерете класовете на еквивалентност на R.

Решение: Ето диаграмата на R:



Класовете на еквивалентност на преднаредба са максималните по включване подмножества на домейна, във всяко от които, всеки елемент е в релация с всеки друг. Фамилията от класовете на еквивалентност е

$$\big\{\{\emptyset\},\ \{\{a\},\{b\},\{c\}\},\ \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\},\ \{\{a,b,c\}\}\big\} \qquad \square$$

Теорема 1. Нека $R \subseteq A \times A$ е преднаредба. Нека $\sim \subseteq A \times A$ е следната релация:

$$\forall a, b \in A : a \sim b \leftrightarrow aRb \wedge bRa$$

Докажете, че $\sim$ е релация на еквивалентност.

Доказателство: Ще докажем, че $\sim$ е рефлексивна. Но това следва директно от рефлексивността на R.

Ще докажем, че $\sim$ е симетрична, тоест, че за всеки два различни $a, b \in A$, ако $a \sim b$, то $b \sim a$. Нека a и b са произволни различни елементи на A. Допускаме, че $a \sim b$. По дефиницията на $\sim$, това е същото като $aRb \wedge bRa$. Заради комутативността на конюнкцията, това е същото като $bRa \wedge aRb$. По дефиницията на $\sim$, това е същото като bRa. Доказахме, че $a \sim b$ влече $b \sim a$.

Ще докажем, че $\sim$ е транзитивна, тоест, че за всеки три елемента $a, b, c \in A$, ако $a \sim b$ и $b \sim c$, то $a \sim c$. Нека a, b и c са произволни елементи на A. Допускаме, че $a \sim b$ и $b \sim c$. По дефиницията на $\sim$, това е същото като $aRb \wedge bRa \wedge bRc \wedge cRb$.

- Тогава е вярно, че $aRb \wedge bRc$. Но R е транзитивна, така че последното влече aRc.
- Освен това е вярно, че $cRb \wedge bRa$. Но R е транзитивна, така че последното влече cRa.

И така, допускайки $a \sim b$ и $b \sim c$, изведохме aRc и cRa. Но по дефиницията на $\sim$, това е същотото като $a \sim c$. С което доказахме и транзитивността на $\sim$.

Щом $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност. □

Задача 39. Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $R \subseteq 2^A \times 2^A$ е дефинирана както в Задача 38, а именно:

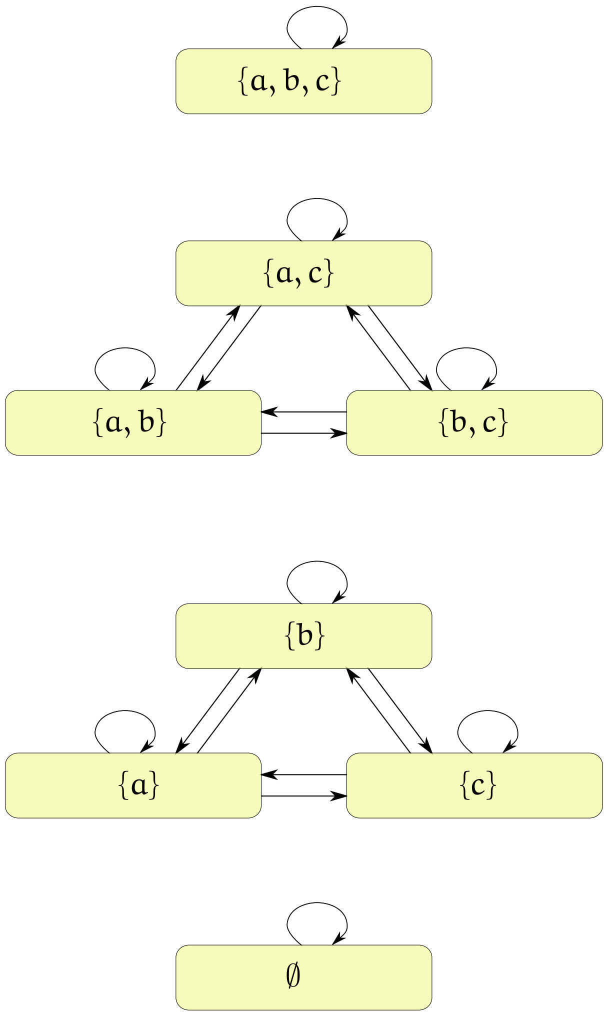
$$\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R \text{ тогава и само тогава, когато } |X| \leq |Y|.$$

Нека $\sim$ е релацията със същото име от Теорема 1, а именно

$$\forall x, y \in A : x {\sim} y \leftrightarrow xRy \wedge yRx$$

Нарисувайте диаграмата на $\sim$.

Решение: Ето диаграмата на $\sim$:



Теорема 2. Нека $R \subseteq A \times A$ е преднаредба. Нека $\sim \subseteq A \times A$ е дефинирана като в Теорема 1. От Теорема 1 знаем, че $\sim$ е релация на еквивалентност. Нека $\mathfrak{X}$ е множеството от класовете на еквивалентност на $\sim$. *Фактор-релацията на* R *спрямо* $\sim$, която означаваме с $R/\sim$, е следната релация над $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$:

$$\forall P, Q \in \mathfrak{X} : (P, Q) \in R/\sim \;\leftrightarrow\; \exists a \in P \; \exists b \in Q : aRb$$

Докажете, че $R/\sim$ е релация на частична наредба.

Доказателство: Релацията $R/\sim$ е над декартовия квадрат от класовете на еквивалентност на $\sim$. Ще докажем, че $R/\sim$ е релация на частична наредба.

- Ще докажем, че $R/\sim$ е рефлексивна. Това е същото като да докажем, че за всеки $Y \in \mathfrak{X}$ е изпълнено

  $$(Y, Y) \in R/\sim$$

  Съгласно дефиницията на $R/\sim$, това е същото като да докажем, че съществуват $a, b \in Y$, такива че aRb. Но това следва веднага от това, че $Y \neq \emptyset$ и R е рефлексивна. ✓

- Ще докажем, че $R/_\sim$ е антисиметрична. Това е същото като да докажем, че ако за някои $C, D \in \mathfrak{X}$ е изпълнено

  $$(C, D) \in R/_\sim \;\wedge\; (D, C) \in R/_\sim$$

  то $C = D$ съвпадат.

  Да допуснем противното: съществуват различни класове на еквивалентност C и D на $\sim$, такива че $(C, D) \in R/_\sim$ и $(D, C) \in R/_\sim$. Щом $(C, D) \in R/_\sim$, то съществуват $a \in C$ и $b \in D$, такива че aRb. Щом $(D, C) \in R/_\sim$, то съществуват $a' \in D$ и $b' \in C$, такива че $a'Rb'$.

  Но тогава заключаваме, че за всеки $c \in C$ и всеки $d \in D$ е вярно, че cRd, понеже

  - cRa, тъй като a и c са от един и същи клас на еквивалентност C,
  - aRb, което вече видяхме, и bRd, тъй като b и d са от един и същи клас на еквивалентност D,
  - и R е транзитивна.

  Аналогично, заключаваме, че dRc, понеже

  - dRa', тъй като d и a' са от един и същи клас на еквивалентност D,
  - $a'Rb'$, което вече видяхме, и $b'Rc$, тъй като b' и c са от един и същи клас на еквивалентност C,
  - и R е транзитивна.

  Щом cRd и dRc за произволни $c \in C$ и всеки $d \in D$, то C и D са подмножества на един и същи клас на еквивалентност и не може да се различни класове на еквивалентност. Това противоречи на направеното допускане, че C и D са различни класове на еквивалентност.

- Ще докажем, че $R/_\sim$ е транзитивна. Това е същото като да докажем, че за всичси $B, C, D \in \mathfrak{X}$ ако $(B, C) \in R/_\sim$ и $(C, D) \in R/_\sim$, то $(B, D) \in R/_\sim$.

  Наистина, нека за произволни класове на еквивалентност B, C и D е вярно, че $(B, C) \in R/_\sim$ и $(C, D) \in R/_\sim$. Тогава съществуват елементи $b, c, d \in A$, такива че $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$, bRc и cRd. От транзитивността на R следва, че bRd. Тогава от дефиницията на $R/_\sim$ следва, че $(B, D) \in R/_\sim$.

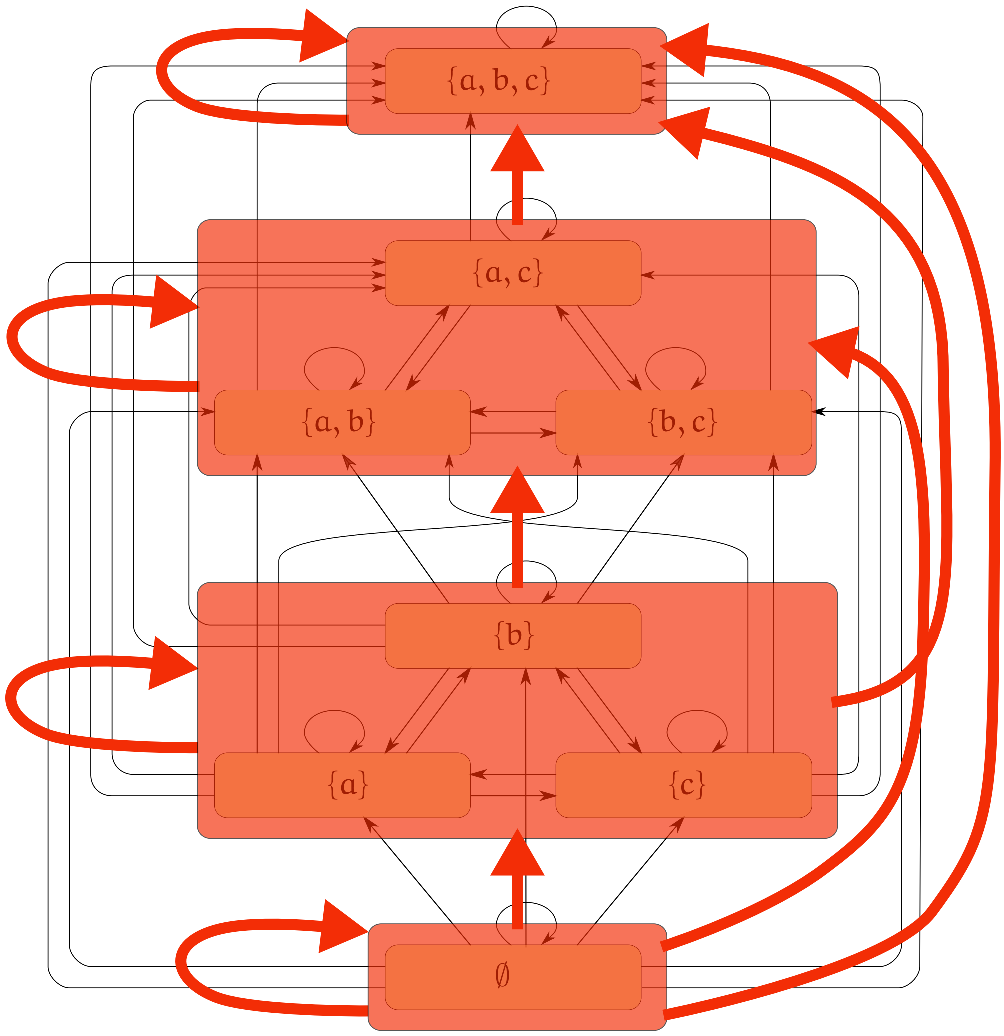
Доказахме, че $R/_\sim$ е релация на частична наредба. □

Задача 40. Също като в Задача 38, нека $A = \{a, b, c\}$ и нека $R \subseteq 2^A \times 2^A$ е дефинирана така:

$$\forall X \in 2^A \; \forall Y \in 2^A : (X, Y) \in R \leftrightarrow |X| \leq |Y|$$

Нарисувайте диаграмата на $R/_\sim$ върху диаграмата на R и то така, че да се вижда, че множеството от класовете на еквивалентност на R е домейнът на $R/_\sim$.

Решение: Ето диаграмата на $R/_\sim$, нарисувана с червено върху диаграмата на R, която видяхме в решението на Задача 38.



Може би вече е ясно защо се използва терминът "фактор-релация" – защото агрегираме множество елементи на оригинални домейн в един единствен нов елемент и така получаваме домейна на новата релация (фактор-релацията). Тези нови елементи са червените правоъгълници на диаграмата. В конкретния случай, фактор-релацията се оказва линейна наредба, но това е заради особеностите на конкретната R. В общия случай фактор-релацията не е непременно линейна наредба, а само частична наредба. □

Задача 41. Нека A е крайно непразно множество. Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност. Нека $C = \{[a] \mid a \in A\}$, където $[a]$ е дефинирано по отношение на R. Дефинираме релацията $S \subseteq C \times C$ така:

$$\forall x \forall y \in C\ (xSy \text{ тогава и само тогава, когато } \exists p \in x\ \exists q \in y : pRq)$$

Докажете или опровергайте, че S е релация на еквивалентност. Докажете или опровергайте, че S е релация на частична наредба.

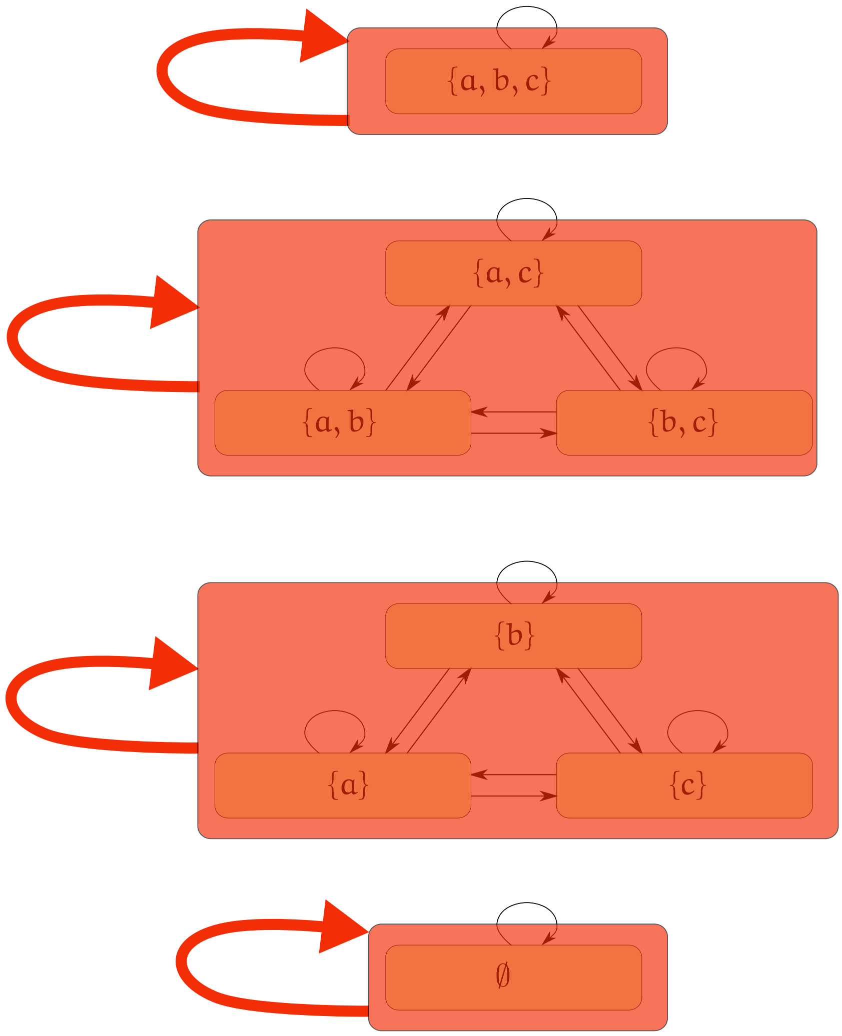
Решение: Забележете, че релацията S от текущата Задача 41 е всъщност фактор-релацията $R/_{\sim}$ от Теорема 2. Тъй като релация на еквивалентност е частен случай на преднаредба, Теорема 2 е в сила. Съгласно Теорема 2, S е релация на частична наредба.

Сега ще докажем, че S е и релация на еквивалентност. За целта е достатъчно да докажем, че S е симетрична, понеже фактът, че S е частична наредба влече, че е рефлексивна и транзитивна.

C е множеството от класовете на еквивалентност на R, което е разбиване на A съгласно изучаваното на лекции. Разглеждаме произволни различни $[a], [b] \in C$, където a и b са някакви различни елементи на A. Да допуснем, че съществува $x \in [a]$ и съществува $y \in [b]$, такива че xRy. Нека w е произволен елемент на $[a]$ и z е произволен елемент на $[b]$. По определение, wRa и xRa. Но R е симетрична, така че aRx. Щом wRa и aRx и R е транзитивна, в сила е wRx. Щом wRx и xRy и R е транзитивна, в сила е wRy. По определение, yRb. Щом wRy и yRb и R е транзитивна, в сила е wRb. По определение, zRb. Но R е симетрична, така че bRz. Щом wRb и bRz и R е транзитивна, в сила е wRz. Тогава $[a] \subseteq [b]$, което е невъзможно, тъй като $[a]$ и $[b]$ са различни дялове на разбиване. Показахме, че за всеки две различни $[a]$ и $[b]$ не съществуват $x \in [a]$ и $y \in [b]$, такива че xRy. Тогава за всеки два различни $[a]$ и $[b]$, където $a, b \in A$, е вярно, че $\neg[a]S[b]$. Тогава S е симетрична.

Щом S е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност. Прочее, S е релацията равенство: това е единствената релация, която е частична наредба и релация на еквивалентност; по отношение на S, всеки клас на еквивалентност (елемент на C) е в релация със себе си и с нищо друго.

Като пример, нека R е релацията $\sim$ от Задача 39. Тогава S е релацията $\sim/_\sim$, чиято диаграма е следната. Ето диаграмата на $\sim$ (в червено):



$\square$

Задача 42. Нека S е опорното множество в тази задача. Допуснете, че S е крайно и непразно. Нека $\Pi(S) = \left\{X \in 2^{2^S} \,|\, X \text{ е разбиване на } S\right\}$. За всеки $X, Y \in \Pi(S)$ казваме, че X *рафинира* Y, ако

$$\forall A \in X \;\; \exists B \in Y : A \subseteq B.$$

Дефинираме релацията $\sqsubseteq_S \subseteq \Pi(S) \times \Pi(S)$ така

$$\forall X, Y \in \Pi(S) : X \sqsubseteq_S Y \text{ тстк } X \text{ рафинира } Y.$$

- Докажете, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба.
- Нарисувайте диаграмата на Hasse на $\sqsubseteq_S$, ако $S = \{a, b, c, d\}$.

Решение: Първо ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба. Забелязваме, че в дефиницията на "рафинира", множеството B, което съдържа множеството A като подмножество, е едно единствено, понеже Y е разбиване, поради което елементите на B не може да се съдържат в никой друг дял на Y освен B. Така че "X рафинира Y" може да се дефинира и така:

$$\forall A \in X \;\; \exists! B \in Y : A \subseteq B.$$

- Ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е рефлексивна. Това е същото като да докажем, че всяко разбиване рафинира себе си. Нека X е разбиване на S. Разглеждаме произволен дял A на X. По отношение на A съществува един единствен дял B на X, такъв че $A \subseteq B$, а именно, $B = A$. ✓

- Ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е антисиметрична. Това е същото като да докажем, че ако за две разбивания X и Y на S е вярно, че, ако X рафинира Y и Y рафинира X, то $X = Y$. Нека X и Y са разбивания на S, такива че X рафинира Y и Y рафинира X. Но тогава

$$\forall A \in X \;\; \exists B! \in Y : A \subseteq B \tag{7}$$
$$\forall C \in Y \;\; \exists D! \in X : C \subseteq D \tag{8}$$

  Разглеждаме произволен дял $A \in X$. По отношение на него, съгласно (7), има един единствен дял B на Y, такъв че $A \subseteq B$. Но в (8), твърдението е за всеки $C \in Y$. В частност, ако C съвпада с B, то (8) казва, че съществува един единствен елемент D на X, такъв че $B \subseteq D$. Но този D може да е само A, понеже X е разбиване – щом X е разбиване и A е дял на X, елементите на A не може да са елементи на други елементи на X.

  Щом $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тези два дяла на X и Y съвпадат; накратко, $A = B$. Забелязваме, че е невъзможно едното разбиване измежду X и Y да съдържа един дял, A или B съответно, а другото разбиване да има още дялове, понеже $A = B$. И така, ако A и B са единствените дялове съответно в X и Y, доказателството е готово – очевидно $X = Y$ в този случай. В противен случай, изтриваме елемента A от X и Y и продължаваме аналогично. Тъй като X и Y са крайни, след краен брой изтривания на общи елементи, X и Y ще станат едноелементни, като елементът им съвпада, така че в крайна сметка наистина $X = Y$.

- Ще докажем, че $\sqsubseteq_S$ е транзитивна. Наистина, нека X, Y и Z са разбивания на S, такива че

$$\forall A \in X \;\; \exists B! \in Y : A \subseteq B \quad \wedge \quad \forall C \in Y \;\; \exists D! \in Z : C \subseteq D \tag{9}$$

  Трябва да докажем, че

$$\forall A \in X \;\; \exists D! \in Y : A \subseteq D \tag{10}$$

  Да разгледаме произволен дял A на X. Нека B е уникалният дял на Y, съдържащ A като подмножество съгласно (9). Но B е един от дяловете на Y. Нека D е уникалният дял на Z, съдържащ A като подмножество съгласно (9). Но при това положение е очевидно, че A се съдържа в D като подмножество – щом всеки елемент на A е елемент на B и всеки елемент на B е елемент на D, то всеки елемент на A е елемент и на D. Но тогава (10) е в сила.

  Тук използвахме очевидната транзитивност на релацията "x е елемент на y".

Доказахме, че $\sqsubseteq_S$ е релация на частична наредба. Ето един начин да се нарисува нейната диаграма на Hasse в случай, че опорното множество има точно четири елемента. За яснота, имената не са написани върху рисунката, но можем да кажем, примерно, че синята точка е a, червената точка е b, зелената точка е c и кафявата точка е d, а жълтите фигури означават дяловете на петнадесетте разбивания. Очевидно има точно един минимален елемент, а именно разбиването $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, и има точно един максимален елемент, а именно разбиването $\{\{a, b, c, d\}\}$.