

Лекция 4: Функции

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

27 август 2025 г.

Определение 1 (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определение 2 (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определенията с изрази от предикатната логика (1)

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \left((\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \right. \\ \left. ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z))) \right)$$

Или по-просто

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \forall w, z \in Y ((x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z)$$

Определение (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

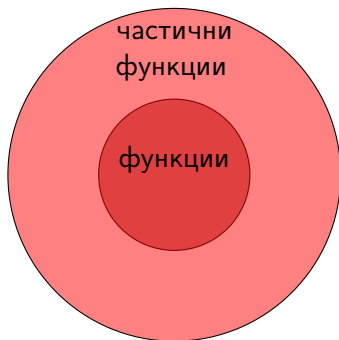
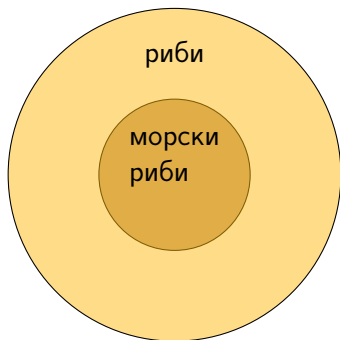
$$\forall x \in X \left((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z) \right)$$

Частични функции и функции

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само “функция” е “тотална функция”. При дадени X и Y , очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само “функция” е частен случай на “частична функция”: всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.

Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.

Частични функции и функции (2)



За формалните определения

На практика често казваме “изображение” (mapping) вместо “функция”. Това обаче не е определение: а какво е “изображение”?

Предпочитаме да не въвеждаме “функция” като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме “функция” чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

Типични записи на функции

Наместо $f \subseteq X \times Y$, пишем $f : X \rightarrow Y$. Чете се “ f е функция с домейн X и кодомейн Y ”. Още може да се чете и като “ f изобразява X в Y ” или “ f е функция от X в Y ”.

Наместо $(x, y) \in f$ или инфиксния запис $x f y$, в контекста на функциите ползваме добре известния запис $f(x) = y$. Тук x е *променлива*. Променлива е нещо като кутийка, в която можем да слагаме неща (от домейна).

Дотук сме дефинирали “ $f(x)$ ”, където x е един елемент на домейна. Можем да обобщим този запис за подмножество на домейна: ако $X' \subseteq X$, то

$$f(X') = \{y \in Y \mid (\exists x \in X' : f(x) = y)\}$$

Алтернативно, $f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$.

За домейна и кодомейна

Тъй като всяка частична функция $f : X \rightarrow Y$ е бинарна релация, определенията $\text{dom}(f)$ и $\text{range}(f)$ от лекцията за релации са в сила. Забележете, че $\text{dom}(f) \subseteq X$, като $\text{dom}(f) \subset X$ е възможно. Възможно е дори $X \neq \emptyset$ и $\text{dom}(f) = \emptyset$. На прост български, $\text{dom}(f)$ се състои от елементите на X , които имат образ под f .

От друга страна, ако f е тотална функция, то $\text{dom}(f) = X$, защото, по определение, всеки елемент от X има образ под f . Ерго, $f(X) = \text{range}(f)$ в този случай.

Очевидно $\text{range}(f) \subseteq Y$, като е възможно $\text{range}(f) \subset Y$ дори ако f е тотална. Не е възможно обаче $\text{range}(f) = \emptyset$, ако f е тотална и $X \neq \emptyset$: елементите на X трябва да се изобразяват в нещо.

Свикнали сме да мислим за функциите на много променливи като за обобщение на функциите на една променлива. Но всяка функция на k променливи в някакъв смисъл е функция на една променлива, която обаче е наредена k -орка.

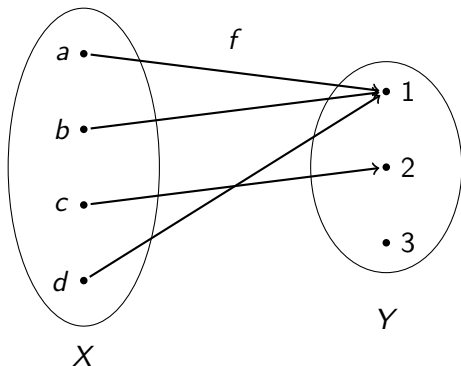
Пример: някаква реална функция на две променливи. Типичен запис е $g(x, y) = z$, където x , y и z са реални. Тогава $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Можем да мислим за g като функция на една променлива, която не е реално число, а наредена двойка от реални числа. Формално правилният запис би бил $g((x, y)) = z$, където $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но това не се ползва.

Забележка: множеството от реалните числа се бележи с $\mathbb{R}$.

Представяне на функция с диаграма

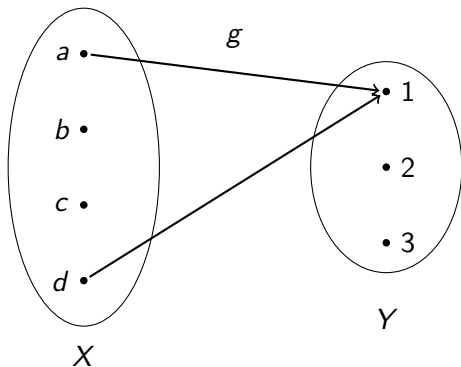
Частичните функции и тоталните функции са бинарни релации, така че може да се представят с диаграми като бинарни релации. Има обаче особености.

Нека $f : X \rightarrow Y$, като X и Y са крайни. Да кажем, $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза **точно** една стрелка.



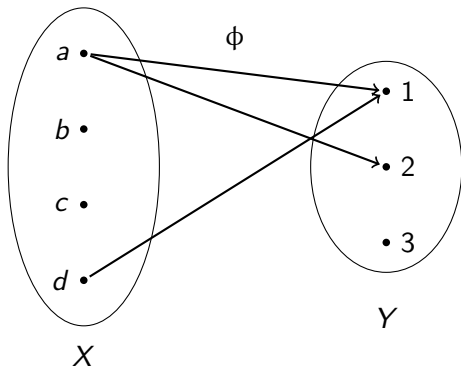
Представяне на частична функция с диаграма

Нека g е частична функция с домейн X и кодомейн Y . От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза не повече от една стрелка.



Диаграма на релация, която не е частична функция

Ако от поне една точка в елипсата, отговаряща на X , излиза повече от една стрелка, това не може да е диаграма на частична функция (оттам, и на тотална). Това е диаграма на релация ϕ с първи домейн X и втори домейн Y .

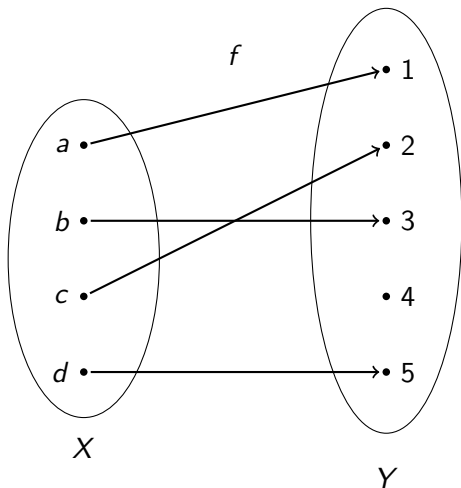


Инъекции, сюръекции, биекции

Инъекции

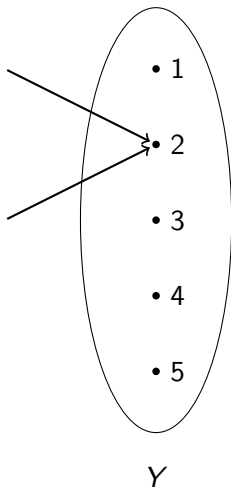
Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *инекция*, ако

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2.$$



Инекции, сюрекции, биекции

Контрапример за инекция

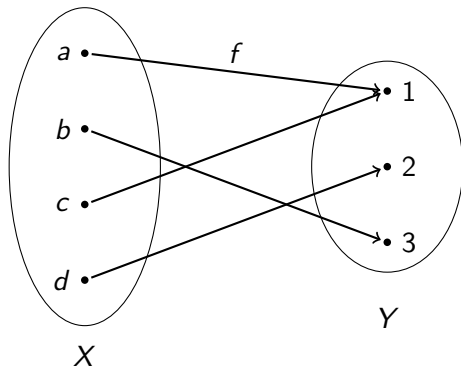


Инекции, сюрекции, биекции

Сюрекции

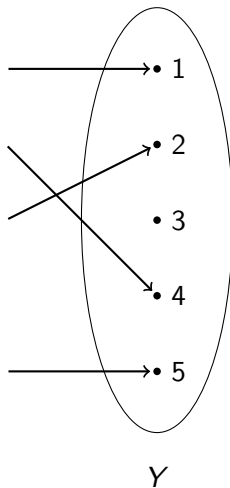
Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *сюрекция*, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

Неформално: кодомейнът да бъде “покрит” от изображението.



Инъекции, сюръекции, биекции

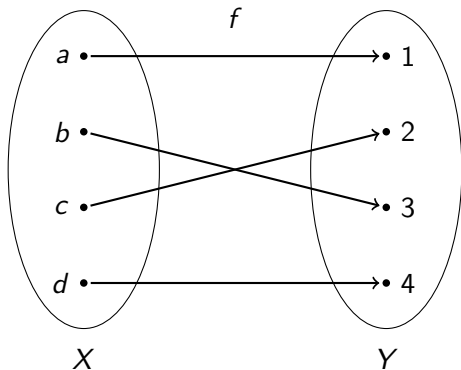
Контрапример за сюръекция



Инекции, сюрекции, биекции

Биекции

Нека $f : X \rightarrow Y$. f е биекция, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.



Инекции, сюрекции, биекции: житейски пример

Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако никой не седи на повече от един стол и няма правостоящи, то сядането е функция.

Ако сядането е функция и на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако сядането е функция и няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове и няма правостоящи, то сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Инекции, сюрекции, биекции – ограничения за бройките

Все още не сме въвели формално “крайно множество” и “брой на елементи на крайно множество”, но интуитивно всеки разбира за какво става дума.

Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Нека $f : X \rightarrow Y$.

Необходимо условие f да е инекция е $m \leq n$. Необходимо условие f да е сюрекция е $m \geq n$. Необходимо условие f да е биекция е $m = n$.

Иначе казано, при $m > n$ няма инекция, при $m < n$ няма сюрекция, при $m \neq n$ няма биекция.

Обратна функция на функция (1)

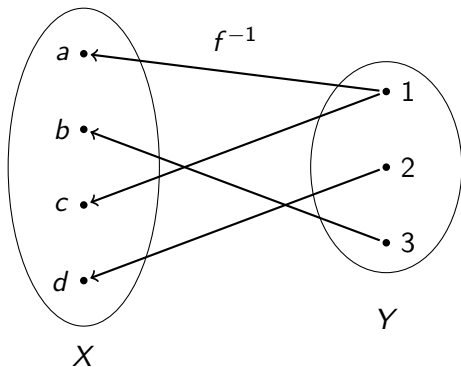
Всяка частична функция $f : X \rightarrow Y$ е релация, така че имаме право да говорим за обратната релация f^{-1} : понятие, което дефинирахме при релациите.

Обаче f^{-1} не е непременно частична функция! Лесно се вижда, че f^{-1} е частична функция тстк

$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$. Ако съществуват $x_1, x_2 \in X$, такива че $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то елементът $y \in Y$, за който $f(x_1) = f(x_2) = y$, ще има (поне) два различни образа под f^{-1} , което е забранено за частичните функции.

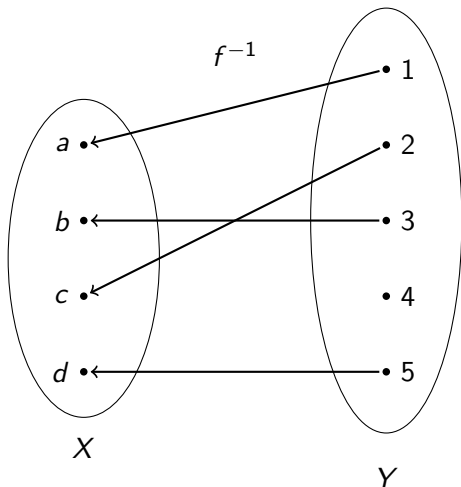
Обратна функция на функция (2)

Ето какво ще получим, ако “обърнем” сюрекцията от слайд 16 (тя не е инекция). Получаваме релация, която не е частична функция.



Обратна функция на функция (3)

Ако обърнем произволна инекция, ще получим частична функция, която не е непременно тотална функция. Ето какво ще получим, ако “обърнем” инекцията от слайд 14:



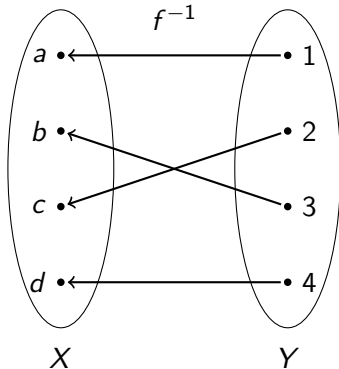
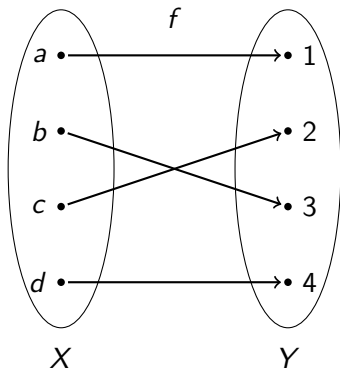
Обратна функция на биекция.

Очевидно е, че f и f^{-1} са тотални функции тстк f е биекция (алтернативно, тстк f^{-1} е биекция).

Очевидно е, че ако A и B са множества, то има биекция от A в B тстк има биекция от B в A .

Пример за обратна функция на биекция.

Нека f е биекцията от слайд 18. Ето диаграмите на f и f^{-1} :



Рестрикция на функция

Нека $f : X \rightarrow Y$ и $X' \subseteq X$. Рестрикцията на f върху X' е $f' : X' \rightarrow Y$, където $\forall x \in X' : f'(x) = f(x)$. Бележим рестрикцията така: $f|_{X'}$.

Алтернативна дефиниция е: $f|_{X'} = \{(x, y) \in f \mid x \in X'\}$.

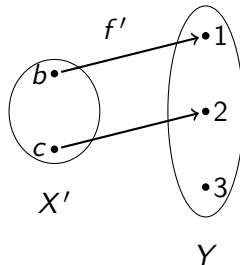
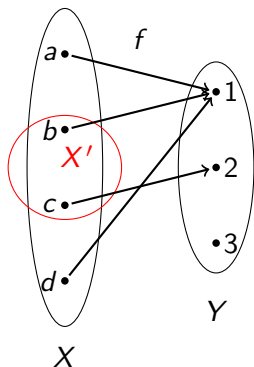
Понятието “рестрикция” може да се обобщи и за частични функции по естествения начин.

Очевидно, всяка частична функция има рестрикция, която е функция – вземаме такова X' , че всеки елемент от X' да има изображение. Това е в сила дори ако $f = \emptyset$; забележете, че $f|_{\emptyset}$ е винаги функция, независимо от това дали $f = \emptyset$ или $f \neq \emptyset$.

Забележете разликата между $f(X')$ и $f|_{X'}$. Първото е подмножество на Y , а второто е истинска функция–множество от наредени двойки, чиито първи елементи са от X' .

Пример за рестрикция на функция

Нека $f : X \rightarrow Y$ е следната функция (това е функцията от слайд 11). Ако $X' = \{b, c\}$, то рестрикцията $f' = f|_{X'}$ е тази:



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Реална функция е всяка функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Нека е дадено уравнение на две реални променливи x и y .

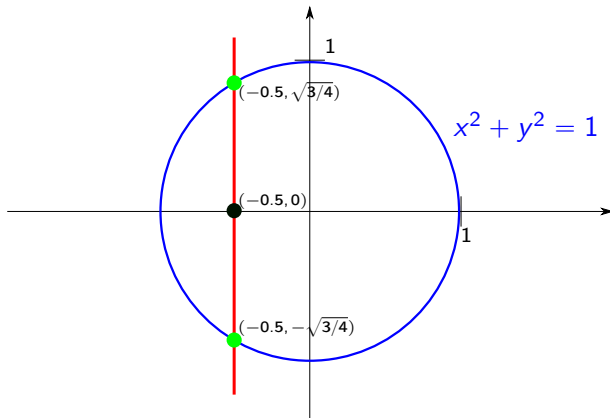
Дали то реализира частична функция $f(x) = y$? Да, ако и само ако издържа теста с вертикалната права. Мислено “влачим” вертикална права върху графиката:

- ако поне на едно място вертикалната права пресича графиката в повече от една точка, f не е дори частична функция,
- ако вертикалната права винаги пресича графиката в точно една точка, f е функция,
- ако вертикалната права винаги пресича графиката в не повече от една точка, f е частична функция.

Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: пример за не-функция

Примерно, $x^2 + y^2 = 1$ не задава функция и съответно не издържа теста с вертикалната права. Дори не е частична функция!



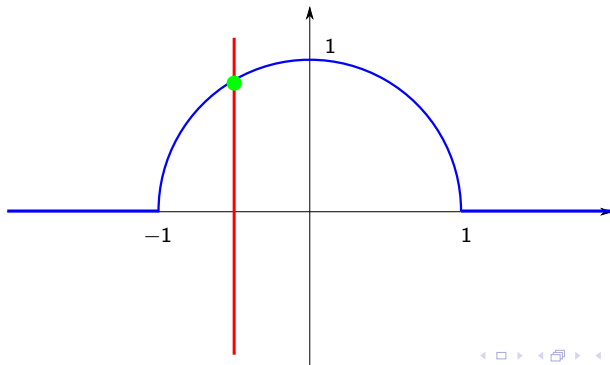
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: пример за функция

От друга страна,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < -1 \text{ или } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{ако } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

е функция (което означава, че е и частична функция).



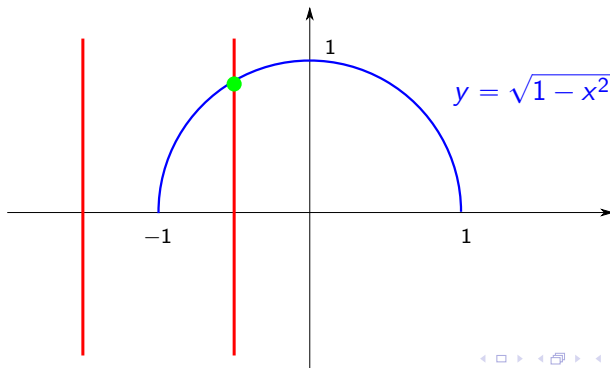
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: пример за частична функция

От трета страна,

$$f(x) = \begin{cases} \text{недефинирана,} & \text{ако } x < -1 \text{ или } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{ако } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

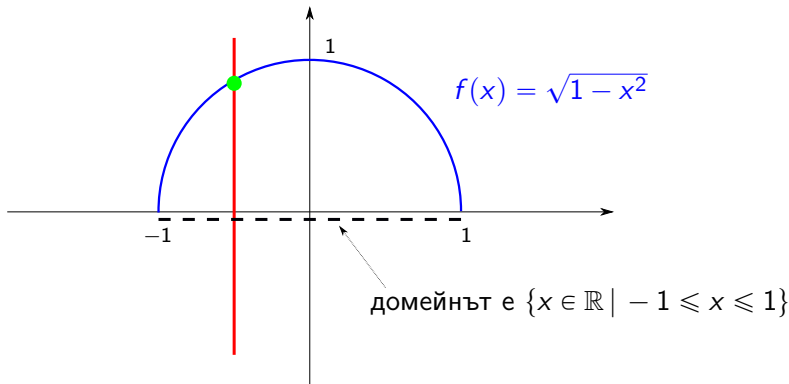
е частична функция, но не е функция.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: друг пример за функция

От четвърта страна, ако $f : \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, то f е функция, но не е реална функция по нашата дефиниция, понеже домейнът не е множеството от всички реални числа.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: инекции и не-инекции, сюрекции и не-сюрекции

Нека е дадена функция f със своята графика. Мислено “влачим” хоризонтална права върху графиката. f е инекция тстк правата не пресича никъде повече от една точка от графиката. f е сюрекция тстк правата навсякъде пресича поне една точка от графиката. Тогава f е биекция тстк правата навсякъде пресича точно една точка от графиката.

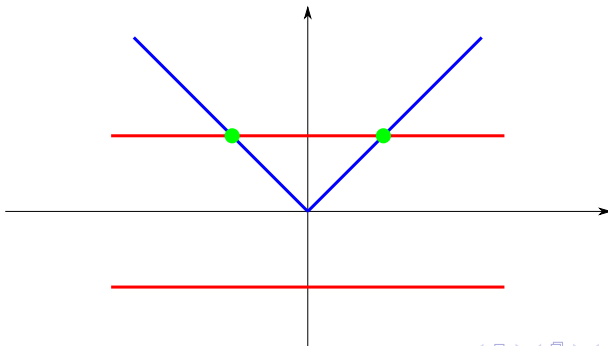
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: не-инекция и не-сюрекция

Нека f е реална функция, такава че

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

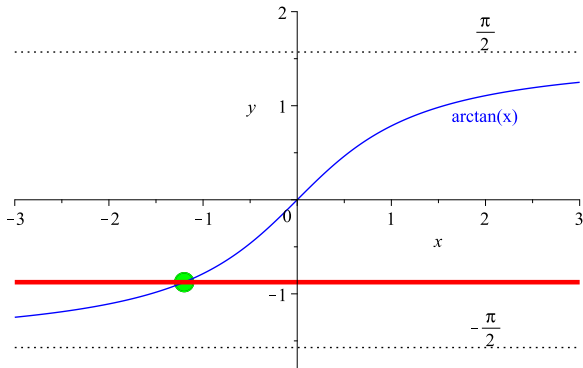
f не е нито е инекция, нито сюрекция.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: инекция, но не-сюрекция

Реалната функция $\arctan(x)$ “издържа” теста с хоризонталната права, така че е инекция, но не е сюрекция.



Графиката е генерирана с *Maple(tm)*.

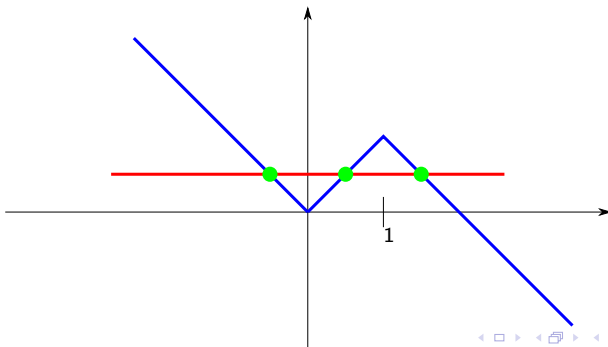
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: сюрекция, но не-инекция

Нека f е следната реална функция.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ x, & \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ако } x > 1 \end{cases}$$

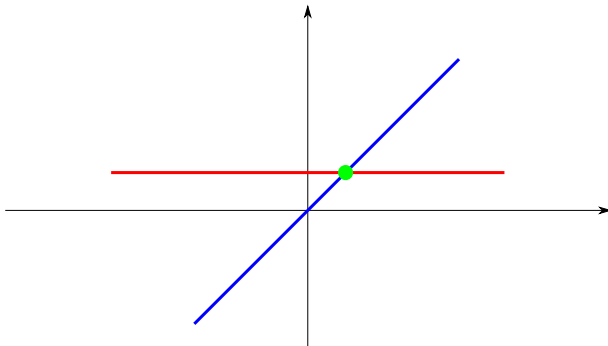
f е сюрекция, но не е инекция.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: инекция и сюрекция

Реалната функция $f(x) = x$ е инекция и сюрекция; тоест, биекция.



КРАЙ