Лекция 4: Крайни и безкрайни, изброими и неизброими множества

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

28 октомври 2025 г.

Дефиницията “множество е крайно, ако има краен брой елементи” **е некоректна**. По същество тя казва “множество е крайно, ако е крайно”. Очевидно това е порочно зациклена дефиниция!

Дефинирането на "крайно множество" става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 1 (крайно множество, кардиналност)

Множество A е крайно, ако

- *или $A = \emptyset$, в който случай кардиналността на A е 0,*
- *или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$; тогава кардиналността на A е n.*

На прост български, кардиналността на крайно множество A е броят на елементите на A и се бележи с $|A|$. "Кардиналността на множество A" и "мощността на множество A" са синоними.

Свойства на крайните множества

Приемаме за очевидна следната теорема.

Теорема 1

Нека X и Y са крайни множества, като $|X| = m$ и $|Y| = n$.

- $m \leqslant n$ *тстк съществува инекция от* X *в* Y.
- $m = n$ *тстк съществува биекция от* X *в* Y.
- $m \geqslant n$ *тстк съществува сюрекция от* X *в* Y.

Определение 2 (безкрайно множество)

Множество е безкрайно, ако не е крайно.

Пример за безкрайно множество е $\mathbb{N}$: колкото и голямо естествено число n да вземем, $n+1$ е по-голямо. Ерго, за всяко естествено n е вярно, че $n+1 \notin \{0, 1, \ldots, n\}$.

Равномощни множества (равенства на кардиналности)

Следната дефиниция е в сила за крайни и за безкрайни м-ва.

Определение 3 (равномощност на множества)

Множества A и B са равномощни, или съизброими, тстк съществува биекция от едното в другото. Пишем $|A| = |B|$.

На английски терминът е *equinumerous*.

Ако A и B са крайни, записът "$|A| = |B|$" касае равенство на числа, което вече видяхме в Теорема 1.

Ако A е безкрайно, нотацията "$|A|$" се ползва и пак казваме, че е кардиналността на A, но сега смисълът е различен от брой елементи. Кардиналността на безкрайно множество е абстрактно понятие. Равенството на кардиналностите на безкрайни множества не е равенство на числа!

Свойства на равномощността на множества

Равномощността на множества е еквивалентност. Независимо от това дали A, B, C са крайни или безкрайни, равномощността на множества има тези свойства.

- $|A| = |A|$ (рефлексивност),
- $|A| = |B| \leftrightarrow |B| = |A|$ (симетричност),
- $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \leftrightarrow |A| = |C|$ (транзитивност).

Ако множествата са крайни, тези свойства са свойства на релацията равенство върху числа, която е релация на еквивалентност. Ако обаче множествата са безкрайни, тези свойства следват от свойства на биекциите.

Следната нотация е в сила за крайни и за безкрайни м-ва.

Нотация 1 ($|A| \leqslant |B|$)

Ако има инекция от м-во A в м-во B, пишем $|A| \leqslant |B|$.

Ако A и B са крайни, то символът "$\leqslant$" означава познатата ни релация на нестрого неравенство върху естествените числа и Теорема 1 ни дава право да се изразим така.

Ако обаче става дума за безкрайни множества или поне B е безкрайно, не става дума за брой елементи и $|A| \leqslant |B|$ не е неравенство между числа. В този случай, нотацията "$|A| \leqslant |B|$" е формален запис на абстрактно свойство на A и B.

Теорема на Cantor–Schröder–Bernstein

В следната теорема, A и B може да са крайни или безкрайни.

Теорема 2 (Теорема на Cantor–Schröder–Bernstein)

Ако $|A| \leqslant |B|$ *и* $|B| \leqslant |A|$, *то* $|A| = |B|$.

Доказателство: Ако става дума за крайни множества, то Теорема 1 доказва твърдението, понеже релацията $\leqslant$ върху естествените числа е антисиметрична. Интересен е случаят, в който множествата са безкрайни.

Следното доказателство е взето буквално от "Записки по дискретна математика" на доцент Христо Ганчев от ФМИ.

Лема 1

Нека $C \subseteq A$ и $|A| \leqslant |C|$. Тогава $|A| = |C|$.

Доказателство: Ако $C = A$, няма какво да доказваме. Нека $C \subset A$. Разглеждаме произволна инекция $f : A \to C$. Конструираме множествата D_0, D_1, D_2, D_3, ... ето така:

$$
\begin{aligned}
D_0 &= A \setminus C \qquad \text{// непразно по допускане} \\
D_1 &= f(D_0) \\
D_2 &= f(D_1) \\
D_3 &= f(D_2) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Накратко, $D_0 = A \setminus C$ и $D_{n+1} = f(D_n)$ за $n \geqslant 0$. Нека $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Разглеждаме изображението $h : A \to A$, дефинирано така:

$$\forall x \in A : h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in D \\ x, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Сега ще докажем, че h е биекция от A в C.

1. Ще докажем, че $\forall x \in A : h(x) \in C$.
   - Ако $x \in D$, то $h(x) = f(x)$ по дефиницията на h. Но $f(x) \in C$, понеже C е кодомейнът на f.
   - Ако $x \notin D$, то $h(x) = x$ по дефиницията на h. Но щом $x \notin D$, в частност $x \notin D_0$. Щом $x \notin D_0$, $x \in C$, понеже $D_0 = A \setminus C$.

2. Ще докажем, че h е инекция от A в C. Разглеждаме произволни $x, y \in A$, такива че $x \neq y$.
   - Да допуснем, че $x \in D$ и $y \in D$. Тъй като f е инекция, изпълнено е $f(x) \neq f(y)$. Но $h(x) = f(x)$ и $h(y) = f(y)$, щом $x, y \in D$. Заключаваме, че $h(x) \neq h(y)$.
   - Да допуснем, че $x \in D$ и $y \notin D$. Щом $x \in D$, $h(x) = f(x)$ по дефиницията на h. Щом $x \in D$, $f(x) \in D$. Ерго, $h(x) \in D$.

     Щом $y \notin D$, $h(y) = y$. Тогава $h(y) \notin D$.

     Заключаваме, че $h(x) \neq h(y)$.
   - Ако $x \notin D$ и $y \in D$, доказваме, че $h(x) \neq h(y)$ аналогично.
   - Да допуснем, че $x \notin D$ и $y \notin D$. Тогава $h(x) = x$ и $h(y) = y$ по дефиницията на h. Заключаваме, че $h(x) \neq h(y)$.

   Заключаваме, че h е инекция от A в C.

3. Ще докажем, че h е сюрекция от A в C. Разглеждаме произволно $z \in C$.
   - Да допуснем, че $z \in D$. Тогава $\exists n \in \mathbb{N} : z \in D_n$. Но $D_0 = A \setminus C$. Тогава $z \notin D_0$. Тогава $\exists n \in \mathbb{N}^+ : z \in D_n$. Но по дефиниция, $D_n = f(D_{n-1})$, щом $n > 0$. Тогава $\exists x \in D_{n-1} : f(x) = z$. Тогава $h(x) = f(x)$. Тогава $h(x) = z$.
   - Да допуснем, че $z \notin D$. Тогава $h(z) = z$ по определението на h.

   И в двата случая, z се явява образ на елемент под h. Заключаваме, че h е сюрекция от A в C.

Щом h е инекция и сюрекция от A в C, h е биекция от A в C. Щом съществува биекция от A в C, в сила е $|A| = |C|$. С това доказахме Лема 1. □

Връщаме се на доказателството на Теорема 2. Нека $u : A \to B$ и $v : B \to A$ са инекции. Кодомейнът на v е A. Нека $C = v(B)$. Очевидно $C \subseteq A$. Очевидно v е инекция от B в C.
Но v е сюрекция от B в C, защото всеки елемент на C е образ на някой елемент на B под v. Щом v е инекция и и сюрекция от B в C, v е биекция от B в C. Тогава $|B| = |C|$.
Разглеждаме $v \circ u$. Приемаме за очевидно, че композицията на инекции е инекция. Но u и v са инекции. Тогава $v \circ u$ е инекция. Нещо повече, тя инекция от A в C. Щом има такава инекция, в сила е $|A| \leqslant |C|$. Щом $C \subseteq A$ и $|A| \leqslant |C|$, съгласно Лема 1, в сила е $|A| = |C|$.

Щом $|A| = |C|$ и $|B| = |C|$, в сила е $|A| = |B|$. Това е краят на доказателството на Теорема 2. □

Изброими множества

Определение 4 (изброимо безкрайно множество)

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.

Определение 5 (изброимо множество)

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно.

Определение 6 (неизброимо множество)

Множество е неизброимо, ако не е изброимо.

Очевидно всяко неизброимо множество е безкрайно. Не е очевидно, че съществуват неизброими множества.

За безкрайните множества (1)

Потенциална и актуална безкрайност

Естествените числа се генерират от процес, който започва от 0 с добавяне на единица:

$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 1 = 2$$
$$\ldots$$
$$1\,000\,000 + 1 = 1\,000\,001$$
$$\ldots$$

Аристотел характеризира този процес като “потенциална безкрайност”. Кулминацията на процеса, а именно множеството от всички естествени числа, е “пълна безкрайност”, или “актуална безкрайност”.

За безкрайните множества (2)

Потенциална и актуална безкрайност

От Аристотелово време чак до 19 век мнозинството от мислителите отхвърлят актуалната безкрайност като нелегитимно понятие. Гаус (Carl Friedrich Gauss), най-великият математик на своето време, пише:

> But concerning your proof, I protest above all against the use of an infinite quantity as a *completed* one, which in mathematics is never allowed. The infinite is only *façon de parler*, in which one properly speaks of limits.
>
> Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Dauben, pp. 120

Редът на Лайбниц е

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Ако гледаме на сумата вдясно като на процес, който апроксимира $\frac{\pi}{4}$ все по-добре с добавяне на все повече събираеми, имаме предвид потенциална безкрайност. Тогава $\frac{\pi}{4}$ е само граница, по израза на Гаус, към която клони сумата, без да я достига никога. Тук и дума не става за пълна безкрайност: на всеки етап от сумирането сме събрали краен брой събираеми.

Ако гледаме на сумата вдясно като на едно цяло нещо, което е точно равно на $\frac{\pi}{4}$, имаме предвид актуална безкрайност.

За безкрайните множества (4)

Парадоксът на Галилео Галилей

Има проблем при безкрайните множества: цялото е "равно" на своя част в смисъл, че елементите им може да бъдат съчетани перфектно.

Множеството на естествените числа (без нулата) $\{1, 2, 3, \ldots\}$ и множеството на точните квадрати $\{1, 4, 9, \ldots\}$ са равномощни. Интуитивно, естествените са повече, защото има естествени нечетни числа, които не са точни квадрати. От друга страна, биекцията $f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{1, 4, 9, \ldots\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n^2$$

съчетава перфектно елементите на двете множества.

Оттук и мнението, че да се говори за "броя на всички числа" и да се приема съществуването на актуалната безкрайност е безсмислица.

За безкрайните множества (5)

Георг Кантор (Georg Cantor) е първият математик, който разглежда сериозно безкрайните множества и създава кохерентна и задълбочена теория за тях. Той въвежда понятия, имащи смисъл на бройки на елементите на безкрайни множества, и работи с тези понятия.

Кантор показва, че множества като $\mathbb{Q}$ (рационалните числа) или множеството на алгебричните ирационални числа (като $\sqrt{2}$), които в днешната терминология са строги надмножества на $\mathbb{N}$, са равномощни с $\mathbb{N}$. След това показва, че $\mathbb{R}$ не е равномощно на $\mathbb{N}$.

За безкрайните множества (6)

Основен резултат на Кантор е, че има различни видове безкрайност. И естествените, и реалните числа са безброй много, но реалните са повече в смисъл, че няма биекция между тях и естествените.

Очевидно изброими безкрайни множества

$\mathbb{N}^+$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}^+ : f(n) = n - 1$.

$\mathbb{N}_e = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е четно}\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}_e \to \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}_e : f(n) = \frac{n}{2}$.

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е точна степен на } 2\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : M \to \mathbb{N}$, където $\forall n \in M : f(n) = \log_2 n$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \text{ където } \forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 2n - 1, & \text{ако } n > 0, \\ -2n, & \text{ако } n < 0. \end{cases}$$

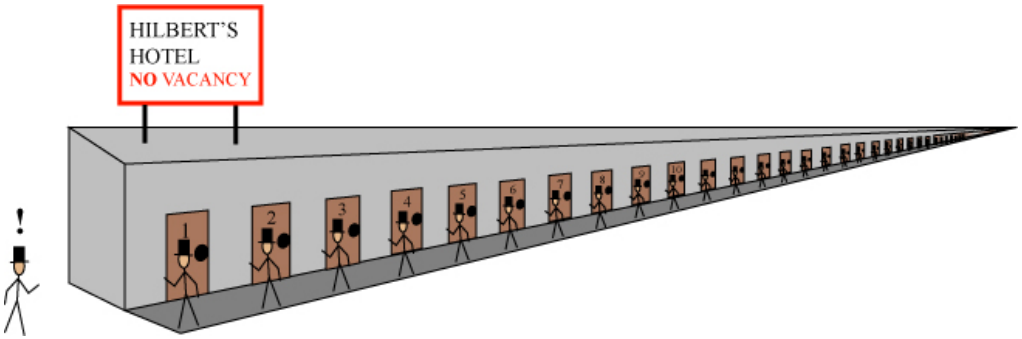
Изброяването е $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(-3) = 6$ и т. н. Ето наредбата:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$$

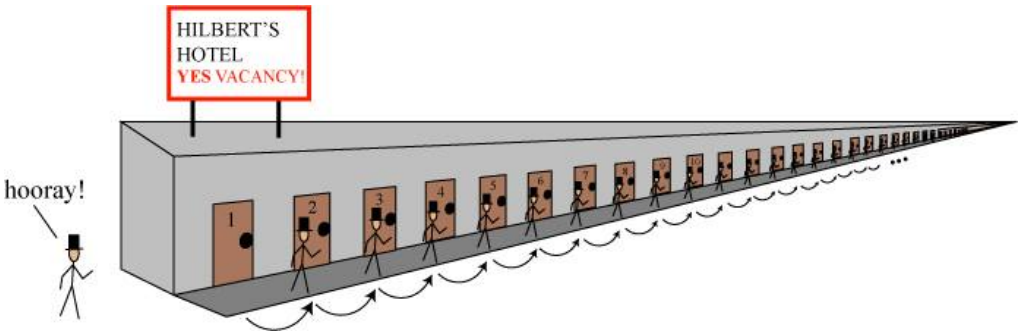
Безкрайността е КОНТРАИНТУИТИВНА

Хотелът на Hilbert

Хотел с безкрайно много стаи, номерирани с 1, 2, 3 и така нататък. Във всяка стая има гост.



Може ли хотелът да приюти нов гост? Колкото и да е контраинтуитивно, да: преместваме едновременно всеки от вече настанените в следващата стая.



Графиките са взети от Интернет от сайт без лицензи.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо

Теорема 3

Съществува биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Доказателство: Твърди се, че има начин да бъдат изброени наредените двойки от естествени числа.

Разбиваме множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ на подмножества S_0, S_1, S_2, ... по следния начин

$$\forall k \in \mathbb{N} : S_k = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = k\}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (2)

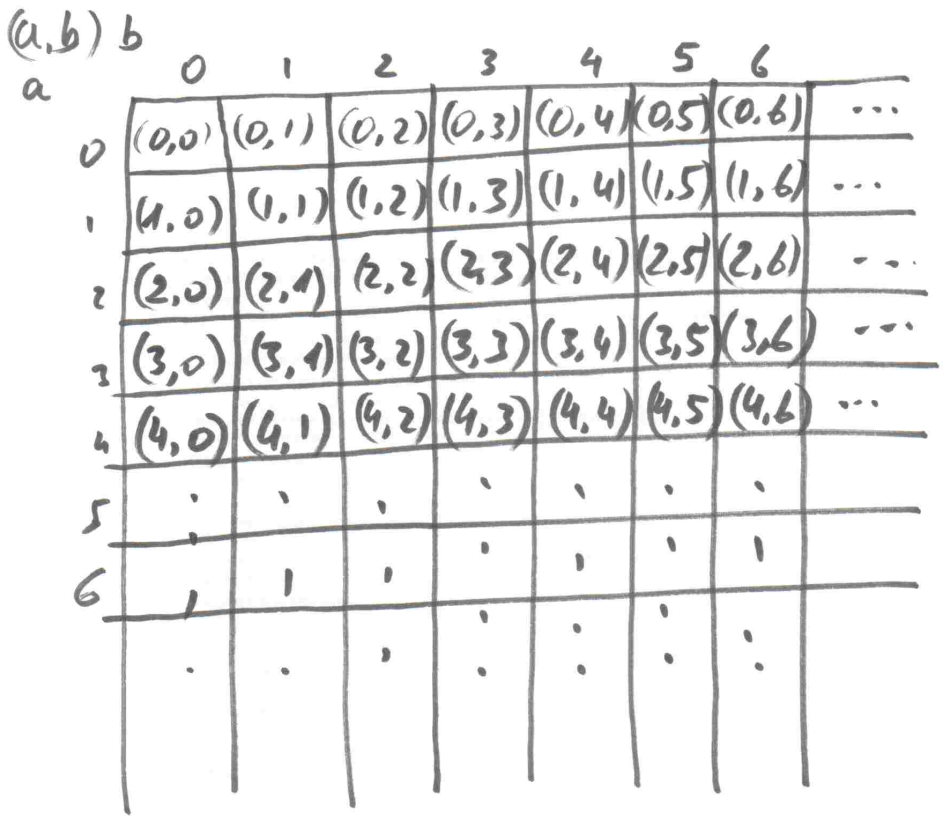
Изброяването е следното: при $i < j$, наредените двойки от S_i преди наредените двойки от S_j, а вътре във всяко S_i нареждаме двойките по нарастващ втори елемент:

$$\underbrace{\overset{0}{(0,0)}}_{S_0} \quad \underbrace{\overset{1}{(1,0)} \quad \overset{2}{(0,1)}}_{S_1} \quad \underbrace{\overset{3}{(2,0)} \quad \overset{4}{(1,1)} \quad \overset{5}{(0,2)}}_{S_2} \quad \underbrace{\overset{6}{(3,0)} \quad \overset{7}{(2,1)} \quad \overset{8}{(1,2)} \quad \overset{9}{(0,3)}}_{S_3}$$

$$\underbrace{\overset{10}{(4,0)} \quad \overset{11}{(3,1)} \quad \overset{12}{(2,1)} \quad \overset{13}{(1,3)} \quad \overset{14}{(0,4)}}_{S_4} \quad \cdots$$

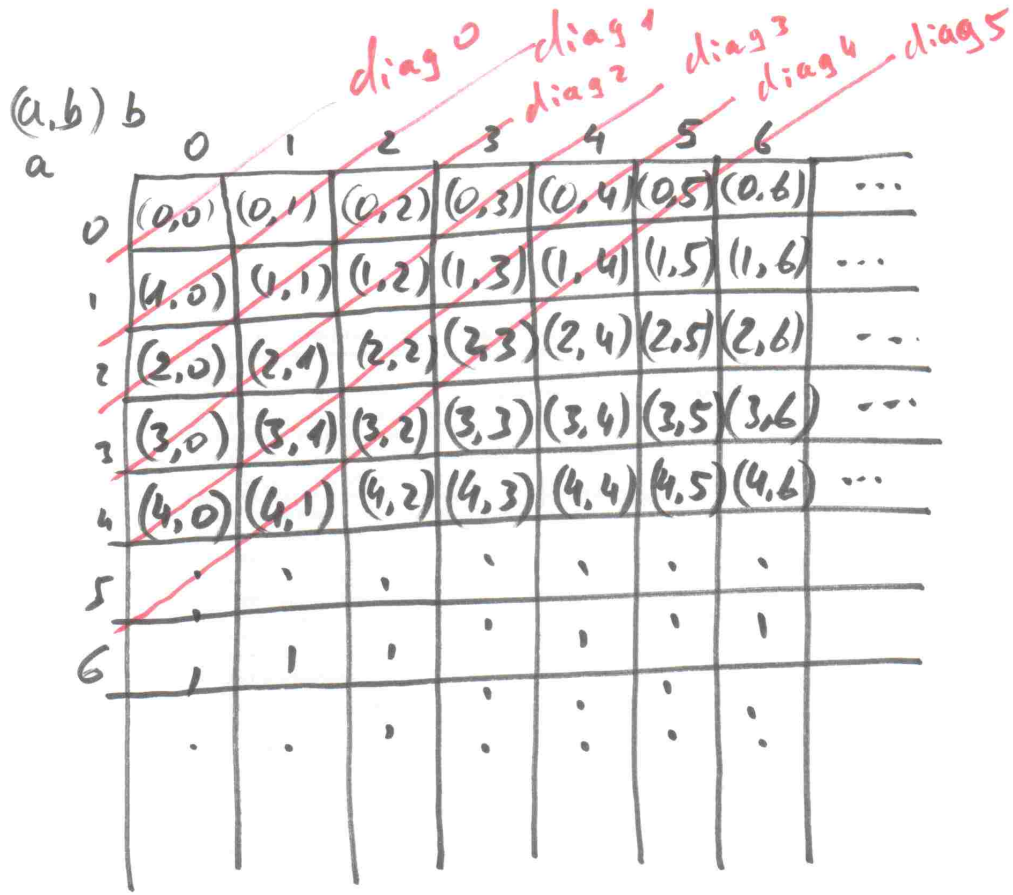
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (3)

Да си представим наредените двойки (a, b) от естествени числа в безкрайна таблица.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (4)

Да групираме наредените двойки по диагонали. Тогава $diag_i$ съдържа точно елементите на S_i.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (5)

Ето визуализация на изброяването

Да разгледаме следната функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f((a,b)) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a,b) = (0,0) \\ \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, & \text{в противен случай} \end{cases} \quad (1)$$

Това е **формалното** описание на функцията на изброяването, която въведохме на слайд 25 и илюстрирахме на слайд 28.

Лема 2

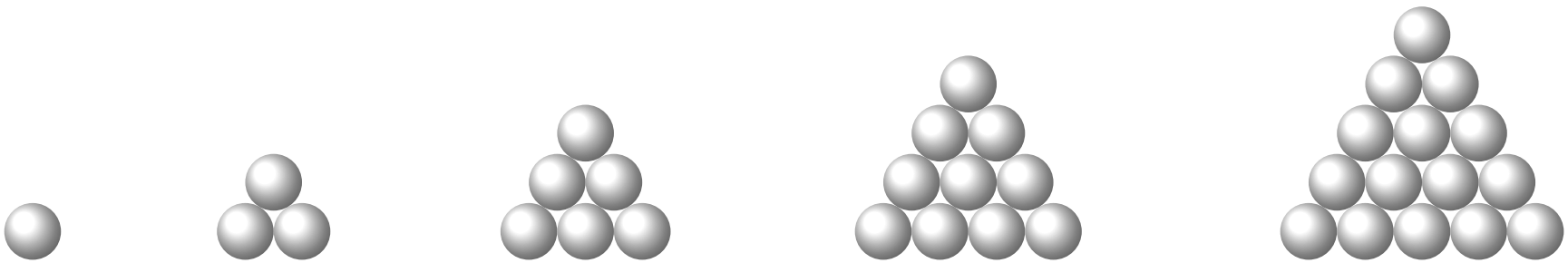
Функцията на изброяването f, дефинирана в (1), е инекция.

Преди формалното доказателство на Лема 2, малко пояснения за смисъла на израза вдясно в (1).

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (7)

Пояснения към функцията на изброяването (1)

Числата от вида $\frac{k(k+1)}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$ се наричат *триъгълните числа*. В нарастващ ред на k, редицата от триъгълните числа започва така: $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$. Следната визуализация за $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ показва защо се наричат "триъгълните числа".



Лесно се вижда, че триъгълните числа са точно сумите $\sum_{i=0}^{k} i$, за $k \in \mathbb{N}$.

В (1), в израза $\boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b}$:

- Събираемото $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е броят на наредените двойки **във всички диагонали преди диагонал номер $a + b$.** То е триъгълното число

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (a+b)$$

  Забележете, че диагонал номер $\boldsymbol{a+b}$ съдържа точно $a + b + 1$ наредени двойки.
- Събираемото b е броят на наредените двойки **преди** (a, b) в диагонал номер $\boldsymbol{a+b}$.

Да допуснем, че f не е инекция. Тогава съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2), такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$. Нека $a_1 + b_1 = m_1$ и $a_2 + b_2 = m_2$.

Случай 1: $m_1 \neq m_2$. БОО, нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа, като $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Ще докажем, че $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Наистина,

$$\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2} \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2}\left(m_2^2 + m_2 - m_1^2 - m_1\right) \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2}\left((m_2 - m_1)(m_2 + m_1) + (m_2 - m_1)\right) \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$$

Но $m_2 - m_1 \geqslant 1$, понеже $m_2 > m_1$ по допускане. Да разгледаме множителя $m_2 + m_1 + 1$. Но това е $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1$. Очевидно $a_2 + b_2 > b_1$ в текущите допускания, а също така $b_1 + 1 > b_1$. Тогава $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1 > 2b_1$. Тогава

$$\frac{1}{2}(\underbrace{m_2 - m_1}_{\geqslant 1})(\underbrace{m_2 + m_1 + 1}_{> 2b_1}) > b_1.$$

Доказахме, че $b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 = f((a_1, b_1))$, а $\frac{m_2(m_2+1)}{2} \leqslant f((a_2, b_2))$. Показахме, че $f((a_1, b_1)) < f((a_2, b_2))$.

Заключаваме, че допускането, че $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, е погрешно в **Случай 1**. ↯

Случай 2: $m_1 = m_2$. Тогава трябва b_1 да е различно от b_2, иначе $a_1 = a_2$, което влече $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Щом $b_1 \neq b_2$ и $m_1 = m_2$, то $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$. С други думи, $f((a_1, b_1)) \neq f((a_2, b_2))$. Заключаваме, че допускането, че $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, е погрешно в **Случай 2**. ↯

Тъй като **Случай 1** и **Случай 2** са изчерпателни, заключаваме, че допускането, че съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2), такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, е погрешно. Заключаваме, че f е инекция. Доказахме Лема 2. □

Лема 3

Функцията на изброяването f, дефинирана в (1), е сюрекция.

Доказателство: Щом f е инекция, f^{-1} е частична функция. Очевидно следният алгоритъм с вход `n` реализира f^{-1}.

```
if (n == 0) {a = 0; b = 0;}
else {c = 1;
      while (c <= n) {n = n - c; c ++;}
      a = c - 1 - n; b = n;}
return (a, b);
```

Приемаме за очевидно, че за изхода (a, b) е вярно, че $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е най-голямото триъгълно число, по-малко или равно на входа n.

Но този алгоритъм работи коректно за всеки вход n. Тогава f^{-1} е тотална функция. Ерго, f е сюрекция. Доказахме Лема 3. $\square$

Лема 2 и Лема 3 доказват Теорема 3.

Определение

Множеството от рационалните числа е

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$

Забелязваме, че (изброимо безкрайно) множество обикновени дроби $\frac{p}{q}$ съответстват на едно и също число; примерно $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{-2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1\,000\,001}{2\,000\,002}$ и така нататък съответстват на, или представляват, едно и също число. И така, рационалните числа нямат уникално представяне чрез обикновени дроби. Може да въведем релация на еквивалентност (каква?) върху множеството от дробите и да кажем, че нейните класове на еквивалентност са рационалните числа.

Множеството от рационалните числа е изброимо (2)

Контраинтуитивно, рационалните числа са изброими

Да кажем, че $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Лесно следствие на Теорема 3 е това:

Следствие 1

Съществува биекция $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$.

Забелязваме, че рационалните числа може да се записват като наредени двойки: дали ще напишем "$\frac{p}{q}$" или "(p, q)" не е съществено.

Един начин да бъдат изброени елементите на $\mathbb{Q}^+$ е да вземем таблицата от слайд 28, да изтрием най-лявата колона (за да няма деление на нула) и след това да "вървим" в реда на онова изброяване, като прескачаме наредените двойки, които представляват числа, които вече са били изброени:

$$0, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, 6, \frac{5}{2}, \ldots$$

$\mathbb{N}^k$ е изброимо

След като се убедихме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо, забелязваме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ също е изброимо. Може да си представим тримерна безкрайна таблица от наредените тройки, да вземаме двумерни "разрези" от нея, състоящи се от тройките с една и съща сума, да наредим "разрезите" по сумите им, а в рамките на един "разрез" лесно може да наредим линейно тройките.

Може да обобщим така.

Теорема 4

За всяко цяло положително k, множеството $\mathbb{N}^k$ е изброимо.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (1)

Теорема 5

Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 3 беше достатъчно да покажем само един начин за изброяване. Сега обаче не е достатъчно да покажем, че един определен начин за изброяване "не работи". Сега се иска да покажем, че **никой** начин за изброяване "не работи". Ще извършим доказателството с допускане на противното. Допускаме, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, тоест, съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (2)

Характеристична редица е безкрайна булева редица $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, която характеризира, или определя, дадено подмножество X на $\mathbb{N}$ по следното правило. За всяко $n \in \mathbb{N}$:

- ако $a_n = 1$, то n се съдържа в X,
- ако $a_n = 0$, то n не се съдържа в X.

Ето няколко примера за характеристични редици и подмножествата на $\mathbb{N}$, които те определят:

- $(0, 0, 0, \ldots)$ */*само нули*/* определя празното множество;
- $(1, 1, 1, \ldots)$ */*само единици*/* определя самото $\mathbb{N}$;
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ */*повтаряне на 10*/* определя четните числа;
- $(0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$ */*само две единици*/* определя $\{1, 2\}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (3)

Нека $\mathcal{A}$ е множеството от характеристичните редици. Съществува очевидна биекция между $\mathcal{A}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

Твърдението "подмножествата на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени" става "елементите на $\mathcal{A}$ могат да бъдат изброени". Това е допускането, което ще опровергаем.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (4)

Допускаме изброяване на характеристичните редици: A_0, A_1, ..., като всяка характеристична редица се появява точно веднъж. Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \ldots)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots)$, и така нататък. Представяме си ги написани в безкрайна колона:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \ldots) \\
A_1 &= (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots) \\
A_2 &= (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots) \\
A_3 &= (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (5)

Разглеждаме главния диагонал: редицата
$X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots)$.

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \ldots)$$
$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots)$$
$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots)$$
$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots)$$
$$\ldots$$

Образуваме нейната "побитова инверсия", редицата
$\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, \overline{a_{3,3}}, \ldots)$.

За всяко i, j, $\overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$, и обратно.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (6)

Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и $\overline{X}$ да се среща. Но $\overline{X}$ не може да е A_0, защото се различават в поне една позиция – нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$; ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.

Аналогично, $\overline{X}$ не може да е A_1, защото се различават в първата позиция, $\overline{X}$ не може да е A_2, защото се различават във втората позиция, и така нататък.

Тогава $\overline{X}$ не се среща в колоната; иначе казано, подмножеството B на $\mathbb{N}$, съответстващо на $\overline{X}$, няма образ в хипотетичната биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. ↯ □

Теорема 6

За всяко множество A, не съществува сюрекция $g : A \to 2^A$.

Доказателство: Да допуснем противното. Тогава съществува A, такова че съществува сюрекция $g : A \to 2^A$. Разглеждаме множеството

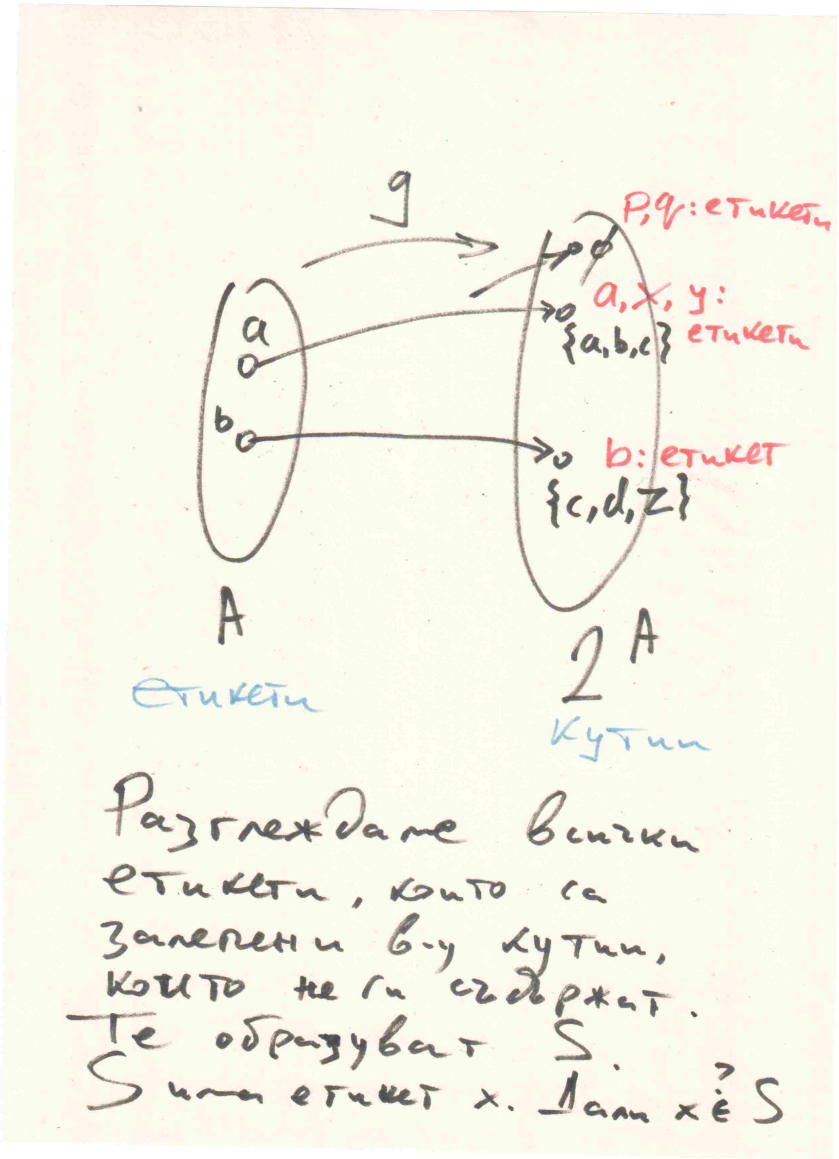
$$S = \{a \in A \mid a \notin g(a)\} \tag{2}$$

Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция, следователно $\exists x \in A : g(x) = S$. Дали $x \in S$?

- Ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (2).
- Ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (2).

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (8)

Илюстрация на алтернативното доказателство



Множеството от реалните числа е неизброимо (1)

Само числата от $[0, 1]$ са неизброимо много

$[0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Нека $\mathcal{A}$ е множеството от всички характеристични редици, което вече дефинирахме на слайд 41. Съществува очевидна биекция $f : [0, 1] \to \mathcal{A}$; разглеждаме числата от $[0, 1]$, записани като двоични дроби в двоична позиционна бройна система, без нулата вляво от двоичната точка, без самата точка, с безкрайно дълъг запис, евентуално попълнен с нули вдясно. Примено, числото една втора по принцип се пише като 0.1 в двоична система, но ние ще го запишем като $10000\ldots$.

Маловажна особеност: някои числа имат по два записа.

- Една втора има два записа по традиционния начин: 0.1 и $0.01111\ldots$. По текущия начин на записване те стават съответно $10000\ldots$ и $01111111\ldots$.
- Единицата има два записа по традиционния начин: 1.0 и $0.11111\ldots$. По текущия начин те стават съответно $0000\ldots$ и $11111\ldots$.

Множеството от реалните числа е неизброимо (2)

$[0,1]$ и $(0,1]$ са равномощни

$(0,1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$. Твърдим, че има биекция $f : [0,1] \to (0,1]$. Доказателството не може да използва функцията-идентитет $\mathrm{id}(x) = x$, защото $(0,1]$ не съдържа нулата, така че $\mathrm{id}(0)$ би било извън $(0,1]$.

Но може да ползваме идеята на хотела на Hilbert: 0 се изобразява в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ се изобразява в $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ се изобразява в $\frac{7}{8}$, и така нататък. Формално, $\forall n \in [0,1]$:

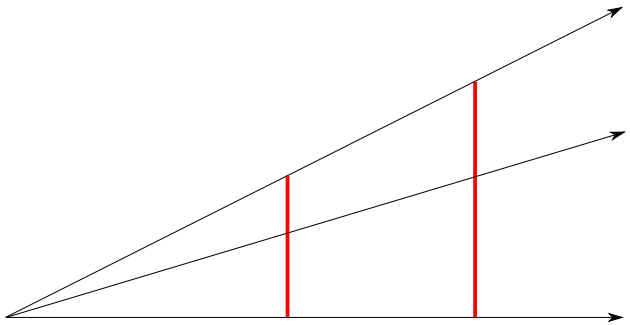
$$f(n) = \begin{cases} \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, & \text{ако съществува } k \in \mathbb{N}, \text{такова че } n = \frac{2^k-1}{2^k}, \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Аналогично се доказва, че $[0,1]$ и $(0,1)$ са равномощни. Вече видяхме, че $[0,1]$ е неизброимо. Тогава и $(0,1)$ е неизброимо.

Множеството от реалните числа е неизброимо (3)

$(0,1)$ и $\mathbb{R}$ са равномощни (1)

Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $b > a$ и $d > c$. Това, че $[a, b]$ и $[c, d]$ са равномощни, е очевидно. Ако мислим за отсечки с различни дължини:



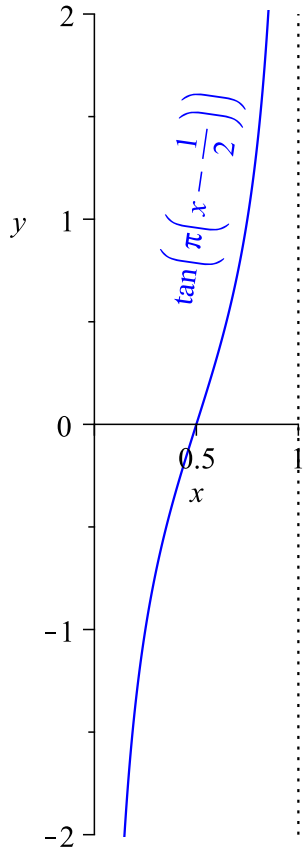
Всеки от интервалите може да е затворен, отворен или полузатворен, равномощността остава в сила.

Ще докажем нещо доста по-контраинтуитивно: кой да е интервал, да кажем $(0, 1)$, е равномощен с $\mathbb{R}$. Отсечка е равномощна с безкрайна права!

Множеството от реалните числа е неизброимо (4)

$(0,1)$ и $\mathbb{R}$ са равномощни (2)

$\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ е биекция, изобразяваща $(0,1)$ в $\mathbb{R}$.



Графиката е генерирана с Maple(tm).

Реалните числа са (безкрайно) повече от рационалните

Видяхме, че $\mathbb{Q}$ е изброимо, а $\mathbb{R}$ е неизброимо. В някакъв смисъл, реалните числа са повече от рационалните: не просто $\mathbb{Q}$ е строго подмножество на $\mathbb{R}$, но реалните числа са по-високо в йерархията на безкрайностите. Това е доста контраинтуитивно, понеже всеки отворен интервал в $\mathbb{R}$ съдържа безкрайно много рационални числа. Ерго, през колкото и силна "лупа" да разглеждаме реалната ос, няма да видим реален интервал, в който няма рационални числа.

КРАЙ