

Лекция 5: Принципи на изброителната комбинаторика

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

5 ноември 2025 г.

Изброителна комбинаторика (Enumerative Combinatorics)

Комбинаториката е дял на дискретната математика, чийто предмет е изброяването на някакви обекти, наречени *комбинаторни структури* или *комбинаторни конфигурации*. Какви са тези комбинаторни структури ще стане ясно нататък.

Изброителната комбинаторика търси точни формули за бройките на тези обекти.

Има и други видове комбинаторика

Аналитична комбинаторика (Analytic Combinatorics)

Аналитичната комбинаторика ползва средства от математическия анализ, за да брое комбинаторни структури, но не чрез точни формули, а чрез асимптотични формули.

Като прост пример, нека X и Y са крайни множества и $|X| = |Y| = n$. Колко повече са частичните функции $f : X \rightarrow Y$ от тоталните функции $g : X \rightarrow Y$, при n клонящо към безкрайност? Първите са $(n + 1)^n$, вторите са n^n , оттук

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Принципи на изброителна комбинаторика

Ще разгледаме няколко основни закона на комбинаториката. Те не са аксиоми: всеки от тях може да бъде доказан.

Ще направим подробно доказателство само на принципа на включването и изключването.

Оттук нататък всички множества, които разглеждаме, са крайни, освен ако изрично не е казано, че са безкрайни.

Принцип на Dirichlet (the pigeonhole principle)

Известен още като *принцип на чекмеджетата*. На английски е *the pigeonhole principle*. Неформално: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже съдържа повече от една ябълка. Формално: ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция от X в Y .

Доказва се елементарно: $|X| > |Y|$ е еквивалентно на $\neg(|X| \leq |Y|)$, а $|X| \leq |Y|$ тук има инекция от X в Y .

Обобщен принцип на Dirichlet

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Алтернативна формулировка на обобщения принцип на Dirichlet е: ако има m ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмежде има поне $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ ябълки.

Едно приложение на принципа на Dirichlet (1)

Крайните частични наредби имат минимум(и) и максимум(и)

Теорема 1

Нека A е крайно множество и нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава R има поне един минимален и поне един максимален елемент.

БОО, ще докажем само факта, че съществува минимален елемент. Да допуснем противното. Тогава съществува крайно A и поне една частична наредба R над A , такава че R няма минимален елемент.

Едно приложение на принципа на Dirichlet (2)

Избираме произволен $a \in A$. По допускане, a не е минимален, така че съществува $b \in A$, такъв че $b \neq a$ и bRa .

По допускане, b не е минимален, така че съществува $c \in A$, такъв че $c \neq b$ и cRb .

И така нататък. Може да изградим колкото искаме дълга верига, завършваща на a :

$$p = z, \dots, c, b, a$$

Правим p с повече от $|A|$ елементи. Съгласно принципа на Dirichlet, p съдържа поне едно повтарящ се елемент x .

Едно приложение на принципа на Dirichlet (3)

В общия случай, p изглежда така

$$p = z, \dots, x, \dots, x, \dots, c, b, a$$

Може x да е a , или b , или c , или z . Не правим никакви допускания за това. Важното е, че има повтарящ се елемент. Знаем, че двете появи на x не са съседни – дефиницията на “верига” не го позволява.

Забелязваме, че в R има контур:

$$p = z, \dots, \underbrace{x, \dots, x}_{\text{това е контур}}, \dots, c, b, a$$

Това противоречи на теоремата, според която в частичните наредби няма контури. ⚡

Едно приложение на принципа на Dirichlet (4)

Топологическо сортиране (1)

Теорема 2

Нека A е крайно множество, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение R' на R .

Доказателството е конструктивно: с алгоритъм, известен като *Topological Sorting*. Няма да строим самото линейно разширение R' , а ще построим $B[1, \dots, n]$, в който ще разположим елементите на A . Разполагането на елементи на множество в масив задава еднозначно линейна наредба. Формално, B и R' са съвършено различни обекти; най-малкото, $|R'| = \frac{n(n+1)}{2}$. Но R' може да бъде конструирана лесно от B .

Едно приложение на принципа на Dirichlet (5)

Топологическо сортиране (2)

Вход: крайно A , като $|A| = n$; частична наредба $R \subseteq A^2$

Изход: масив B , реализиращ линейно разширение R' на R

- ① $i \leftarrow 1$
- ② избираме произволен $a \in A$, който е минимален елемент на R
- ③ $B[i] \leftarrow a$, изтриваме a от A и от R , правим $i++$
- ④ ако $i = n + 1$, върни B , в противен случай иди на ②.

Алгоритъмът е коректен, тъй като в началото има поне един минимален елемент съгласно Теорема 1, а при всяка следващо достигане на ред ② пак има поне един минимален елемент, тъй като изтриване на елемент от релацията не може да образува контур, ерго тя остава частична наредба след всяко изтриване на ред ③.

Принцип на разбиването (събирането)

Дадено е множество X и разбиване $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ на X .
Тогава

$$|X| = |Y_1| + \dots + |Y_k| \quad (1)$$

Забележете, че това остава в сила дори някои от множествата $Y_1, \dots, Y_k$ да са празни. Съгласно формалната дефиниция, това не би било разбиване, но (1) остава в сила: мощностите на празните Y_i са нули и те не се отразяват на сумата.

Приемаме този принцип за очевиден и няма да правим доказателство.

Това е тривиално следствие от принципа на разбиването. Нека е дадено множество A в универсум U . Тогава

$$|A| = |U| - |\bar{A}| \quad (2)$$

Очевидно $\{A, \bar{A}\}$ е разбиване на универсума, така че от принципа на разбиването имаме $|U| = |A| + |\bar{A}|$.

Не е невъзможно $\bar{A}$ да е празно, но и тогава (2) остава в сила.

Принцип на умножението

Нека A и B са множества. Тогава

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Приемаме го за очевиден и без доказателство.

Естествено обобщение е следното. Ако $A_1, \dots, A_k$ са множества, то

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

Написано по по-икономичен начин:

$$\left| \times_{i=1}^k A_i \right| = \prod_{i=1}^k |A_i|$$

Принцип на биекцията

Нека A и B са множества. $|A| = |B|$ тогава и само тогава, когато съществува биекция $f : A \rightarrow B$.

Това е тривиален извод от дефиницията на мощност на множество.

Този принцип е много полезен, когато, за да изброим някакви обекти, изброяваме други обекти и показваме, че съществува биекция между двете множества от обекти.

Нека A е множество. Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Нека A има k класа на еквивалентност и всеки клас на еквивалентност има кардиналност m . Тогава

$$m = \frac{|A|}{k}$$

Принцип на включването и изключването (1)

Въведение

Принципът на включването и изключването се явява обобщение на принципа на разбиването. При разбиването намираме кардиналност на множество като сума от кардиналностите на дяловете на някое негово разбиване. Сега е дадено покриване на множеството и намираме кардиналността на множеството, като събираме и изваждаме кардиналностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, по тройки и така нататък.

Принцип на включването и изключването (2)

Пример (1)

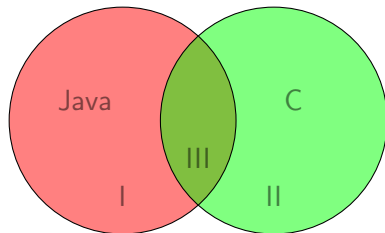
Дадена е група студенти. 10 от тях посещават практикум по Java, 12 посещават практикум по C и е известно, че всеки студент посещава поне един практикум. От колко студента се състои групата?

Нека групата е A . Очевидно $12 \leq |A| \leq 22$, като тези граници са точни.

Ако обаче е известно, че точно 2-ма студенти посещават и Java, и C, веднага следва, че $|A| = 20$. По-подробно, $|A| = 10 + 12 - 2 = 20$.

Принцип на включването и изключването (3)

Пример (2)



Сумата $10 + 12 = 22$ брой прекалено много (overcounting). Тъй като брой райони I и II правилно, по веднъж, но брой район III неправилно: два пъти.

Сумата $10 + 12 - 2 = 20$ брой всеки район точно веднъж.

Принцип на включването и изключването (4)

По-сложен пример (1)

Дадена е група студенти. 20 посещават практикум по Java, 19 по C и 17 по PHP. 8 посещават Java и C, 7 посещават Java и PHP, 8 посещават C и PHP. 3 посещават и трите практикума. Групата се състои от 46 студенти. Колко студенти не посещават нито един от трите практикума?

Принцип на включването и изключването (5)

По-сложен пример (2)

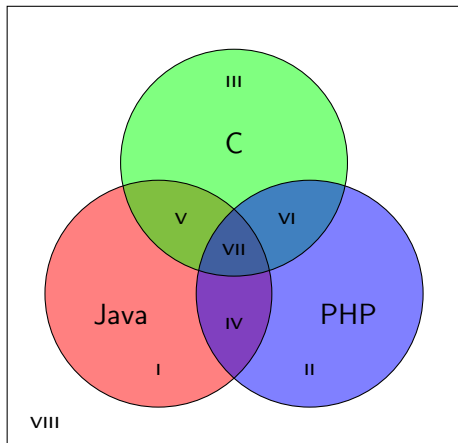
Отговорът е

$$46 - (20 + 19 + 17) + (8 + 7 + 8) - 3 = 46 - 56 + 23 - 3 = 10$$

$(20 + 19 + 17) - (8 + 7 + 8) + 3 = 36$ е броят на студентите в поне един практикум. Да видим защо.

Принцип на включването и изключването (6)

По-сложен пример (3). Диаграма на Venn на практикумите.

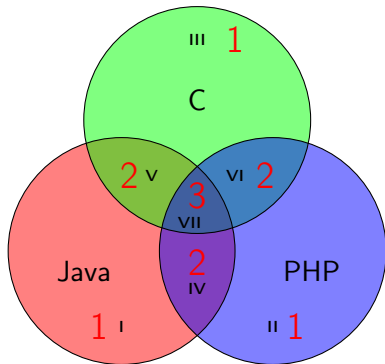


Търсим кардиналността на обединението на Java, C и PHP.

I, ..., VIII са районите. I са тези, които ходят само на Java, V са само на Java и C, и т.н. Ние не знаем кардиналностите на районите, освен на VII. Ако ги знаехме, задачата щеше да е много лесна.

Принцип на включването и изключването (7)

По-сложен пример (4). $20 + 19 + 17 = 56$ е прекалено много.

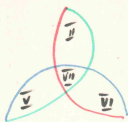


Сумата $20 + 19 + 17$ брои I, II и III по един път, но IV, V и VI биват броени по два пъти, а тримата студенти от VII биват броени три пъти от тази сума.

Заради това 56 е повече от кардиналността на обединението.

Принцип на включването и изключването (8)

По-сложен пример (5)



$8+7+8$ брой II, V и VI
веднъж и VII три пъти.

Това е $(20+19+17) - (8+7+8)$

брой I, III, IV, II, V и VI в

веднъж (правилно!),

но брой VII нула пъти.

$(20+19+17) - (8+7+8) + 3$ брой
Всеки от районите I..VII веднъж

Това са 36 студенти ходят
на поне един факт., така че

$46 - 36 = 10$ не ходят на
нищо един.

Принцип на включването и изключването (9)

Обща формулировка

Теорема 3

За всяко $n \geq 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (3)$$

Доказателството е със **силна индукция** по n . Базата е $n = 1$.
(3) става $|A_1| = |A_1|$. ✓ Индукционното предположение е, че за всяко $k \in \{1, \dots, n-1\}$, за **всеки** k множества $B_1, \dots, B_k$:

$$|B_1 \cup \dots \cup B_k| = \sum_{1 \leq i \leq k} |B_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |B_i \cap B_j| - \dots + (-1)^{k-1} |B_1 \cap \dots \cap B_k| \quad (4)$$

В частност, при $k = n-1$ и мн-ва $A_1, \dots, A_{n-1}$, предп. става:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \quad (5)$$

Принцип на включването и изключването (10)

Индукционната стъпка от доказателството

Индукционната стъпка е за стойност на аргумента n . В сила е

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| &= | \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_X \cup \underbrace{A_n}_Y | = \\ &= | \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}}_X | + | \underbrace{A_n}_Y | - | \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_X \cap \underbrace{A_n}_Y | \quad (6) \end{aligned}$$

тъй като $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (от (4) при $k = 2$).

Знаем колко е $|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}|$ от (5). Да разгледаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$.

Принцип на включването и изключването (11)

Разглеждаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$ (1)

В сила е

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n) \quad (7)$$

заради дистрибутивността на сечението спрямо обединението.

Дясната страна на (7) е обединение на $n - 1$ множества и (4) е приложимо с $k = n - 1$ и $B_1 = A_1 \cap A_n, \dots, B_{n-1} = A_{n-1} \cap A_n$.
Съгласно (4):

$$\begin{aligned} |(A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| = & + \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)| \\ & \dots \\ & + (-1)^{n-2} |(A_1 \cap A_n) \cap \dots \cap (A_{n-1} \cap A_n)| \quad (8) \end{aligned}$$

Принцип на включването и изключването (12)

Разглеждаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$ (2)

Опростирайки дясната страна на (8) и предвид (7), получаваме

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = & + \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| \\ & \dots \\ & + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \end{aligned} \quad (9)$$

Принцип на включването и изключването (13)

В дясната страна на (6) заместваме съгласно (5) и (9) и получаваме

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| = \\ & \left(\sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \right) \\ & + |A_n| \\ & - \left(\sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| - \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \right) = \\ & \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \\ & - \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \quad (10) \end{aligned}$$

Принцип на включването и изключването (14)

В дясната страна на (10) групираме събираемите от горния и долния ред по подходящ начин:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq k \leq n-1}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \\ - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} |A_i \cap A_n| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} |A_i \cap A_j \cap A_n| - \dots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n-1 \\ 1 \leq \dots \leq i_{n-2} \leq n-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| = \end{aligned}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ 1 \leq \dots \leq i_{n-1} \leq n}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Получихме дясната страна на (3). □

Принцип на включването и изключването (15)

Символно, групирания и опростявания в дясната страна на (10) са следните

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| \text{ не се групира с нищо;} \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|; \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|; \\ & \dots \end{aligned}$$

$$(-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \text{ се групира с } (-1)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-2} \leq n-1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n|;$$

$$(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \text{ не се групира с нищо.}$$

Принцип на включването и изключването (16)

Това е лесно следствие от Теорема 3.

Следствие 1

За всяко $n \geq 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \dots, A_n$, намиращи се в произволен универсум U :

$$|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (11)$$

Доказателство: Имаме

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = |U| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| \quad (12)$$

от принципа на изваждането.

Лявата страна на (12) е $|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$ по обобщения закон на De Morgan, а в дясната му страна замества $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ с израза от (3). Получаваме (11).

КРАЙ