

Дискретни структури, лекция 2: множества

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

19 август 2025 г.

“Множество” е първично понятие, което не се дефинира формално. Неформално, множество е не подредена колекция от някакви обекти.

На английски терминът е *set*, откъдето *теория на множествата* е *Set Theory*.

При изграждане на фундамента на математиката хората са установили, че всички дялове могат да се формализират чрез множества.

Underlying the mathematics we study in algebra, geometry, combinatorics, probability, and almost every other area of contemporary mathematics is the notion of a set. Very often this concept provides an underlying structure for a concise formulation of the mathematical topic being investigated.

Ralph Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics,
5th edition, Pearson Education, pp. 123

Как означаваме множествата (1)

Обикновено, но не винаги, имената на множествата са главни латински букви: A , B и така нататък. При изреждане на елементите се ползват фигурните скоби “{” и “}”, а имената на елементите са разделени със запетаи, например

$$A = \{a, b, c\}$$

Принадлежността към множество се означава с “ $\in$ ”, а непринадлежността с “ $\notin$ ”, например

$$a \in \{a, b, c\}, \quad d \notin \{a, b, c\}$$

Редът на изброяване на елементите е без значение:

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$$

Многократни появи на име на елемент нямат значение:

$$\{a, b, c\} = \{a, a, a, b, c\} = \{a, b, c, b, a\}$$

Как означаваме множествата (2)

Следните две множества са **различни**:

$$A = \{a, b\} \quad \text{и} \quad B = \{\{a, b\}\}$$

A има точно два елемента: a и b . B има точно един елемент: множеството A .

Множества може да са елементи на други множества!

Следният запис не означава множество, понеже е **синтактично неправилен**:

$$\{\{a, b\}$$

Фигурните скоби имат значение!

Нека $A = \{a, \{a, b\}, b\}$. Вярно е, че

$$a \in A$$

$$b \in A$$

$$\{a, b\} \in A$$

Но не е вярно, че

$$\{a\} \in A$$

тъй като нито един от елементите на A не е $\{a\}$. Наистина, A има елемент a , но вече знаем, че a и $\{a\}$ са съвършено различни обекти.

Нотация за конструиране на м-во от друго м-во

Със *set constructor notation* може да строим (отделяме) множество Y от друго множество X . Нека X е известно множество и $\pi(a)$ е предикат с домейн X . Тогава

$$Y = \{a \in X \mid \pi(a)\}$$

казва, че Y е множеството от тези елементи на X , за които предикатът е изпълнен. Можем да запишем това и така

$$Y = \{a \mid a \in X \wedge \pi(a)\}$$

Подмножества и надмножества.

Нека A е множество, π е предикат над него и $B = \{a \in A : \pi(a)\}$. Казваме, че B е *подмножество* на A и пишем

$$B \subseteq A$$

Понякога пишем $A \supseteq B$ и казваме, че A е *надмножество* на B .

Интересен е случаят, в който $B \subseteq A$, но $B \neq A$. Тогава казваме, че B е *същинско подмножество* на A и пишем $B \subset A$, като “ $\subset$ ” прилича на “ $<$ ”. За да е изпълнено $B \subset A$, то трябва да съществува $a \in A$, такъв че $a \notin B$. Алтернативно, можем да кажем, че A е *същинско надмножество* на B и да запишем $A \supset B$.

Всяко м-во е подмн-во на себе си. Празното м-во $\emptyset$.

Да разгледаме следните два екстремни случая на подмножества на множеството A :

- $\forall a \in A : \pi(a)$. В този случай $B = A$. Виждаме, че всяко множество е подмножество на себе си. Неслучайно символът " $\subseteq$ " прилича на " $\leq$ ".
- $\neg \exists a \in A : \pi(a)$. В този случай B няма елементи. Казваме, че B е *празното множество* и пишем $B = \emptyset$ или $B = \{ \}$.

Внимавайте с празното множество!

Празното множество е подмножество на всяко множество, включително и на себе си.

Забележете разликата между $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$! Второто не е празното множество, а множеството, чийто единствен елемент е празното множество. В сила са

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\} \quad (1)$$

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \quad (2)$$

но по различни причини. $\emptyset$ е подмножество на всяко множество, така че (1) е вярно независимо от множеството вдясно, докато (2) е вярно само защото множеството вдясно има елемент $\emptyset$.

Степенното множество на множество.

Нека A е множество. Множеството от всички подмножества на A се нарича *степенното множество на A* , на английски е *the power set of A* . Степенното множество на A бележим с 2^A или $\mathcal{P}(A)$ или $\text{pow}(A)$. Внимание: записът " 2^A " не означава повдигане на число на степен число! Това е чисто формален запис на едно множество.

Ето примери за степенно множество.

- Нека $A = \emptyset$. Тогава $2^A = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$.
- Нека $A = \{a, b, c\}$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Максималност по включване (1)

Нека е дадено множество A и предикат σ върху 2^A (предикатът е върху подмножествата на A , а не върху елементите на A !).

Определение 1

За всяко $B \subseteq A$, казваме, че B е максимално по включване по отношение на σ , ако

- ① $\sigma(B)$ и
- ② $\forall C (B \subset C \subseteq A \rightarrow \neg \sigma(C))$

На чист български, максимално по включване подмножество е такова, за което свойството (предикатът) е в сила, но то не е в сила за никое същинско негово надмножество.

За да говорим за максималност по включване, трябва да имаме предвид свойство (предикат). Без свойство, това понятие няма смисъл.

Максималност по включване (2)

На английски има елегантно терминологично разграничение между “максимално по включване” и “глобално максимално”:

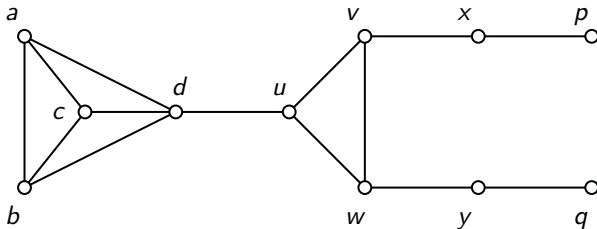
- 1 “максимално по включване” е *maximal*,
- 2 а “глобално максимално” е *maximum*.

На български няма аналогична терминологична разлика, базирана на различни суфикси.

Максималност по включване: пример с клика в графи

Какво е граф

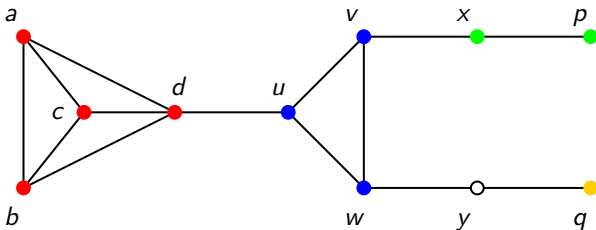
Неформално, *граф* е обект, който се състои от *върхове* и *ребра*. Всяко ребро има два края, които са върхове. Ето примерна рисунка на граф. Неговите върхове са точките и неговите ребра са отсечките:



Максималност по включване: пример с клика в графи

Какво е клика (1)

Клика е множество от върхове, всеки два от които са краища на някое ребро. Всяко едноелементно множество от връх е клика и множеството от краищата на всяко ребро е клика. В нашия пример, $\{q\}$, $\{x, p\}$, $\{u, v, w\}$ и $\{a, b, c, d\}$ са клики.

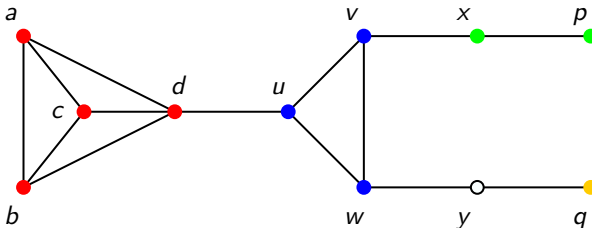


Максималност по включване: пример с клика в графи

Какво е клика (2)

$\{a, b, c, d\}$ е най-голямата клика – друга клика с четири върха няма. Ясно е защо $\{a, b, c, d\}$ е максимална клика.

Дали $\{u, v, w\}$ е максимална клика в **някакъв смисъл**?



Да: към $\{u, v, w\}$ не може да добавим връх, запазвайки свойството множеството да е клика.

$\{a, b, c, d\}$ е **maximum**, докато $\{u, v, w\}$ е **maximal**.

Минималност по включване

Дуалното понятие на “максималност по включване”

Нека е дадено множество A и предикат σ върху 2^A .

Определение 2

За всяко $B \subseteq A$, казваме, че B е минимално по включване по отношение на σ , ако

- 1 $\sigma(B)$ и
- 2 $\forall C (C \subset B \rightarrow \neg \sigma(C))$

На чист български, минимално по включване подмножество е такова, за което свойството (предикатът) е в сила, но то не е в сила за никое същинско негово подмножество.

За да говорим за минималност по включване, трябва да имаме предвид свойство (предикат). Без свойство, това понятие няма смисъл.

Дефинираме няколко основни операции (действия) върху множества: обединение, сечение, разлика, симетрична разлика, допълнение.

Нека A и B са множества.

Определение 3

Обединението на A и B е множеството:

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$$

Обединението е аналог на логическия съюз дизюнкция.
Обединението е комутативно, понеже дизюнкцията е комутативна.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \cup \{a, b, x, y\} = \{a, b, c, d, x, y\}$$

Определение 4

Сечението на A и B е множеството:

$$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$$

Сечението е аналог на логическия съюз конюнкция. Сечението е комутативно.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \cap \{a, b, x, y\} = \{a, b\}$$

Операции върху множества

Разлика (set difference)

Определение 5

Разликата A без B е множеството:

$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$$

Разликата е аналог на логическия съюз импликация; по-точно, отрицание на импликация. Разликата не е комутативна.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \setminus \{a, b, x, y\} = \{c, d\}$$

Операции върху множества

Симетрична разлика (symmetric set difference)

Определение 6

Симетричната разлика на A и B е множеството:

$$A \triangle B = \{a \mid a \in A \oplus a \in B\}$$

Симетричната разлика е аналог на логическия съюз изключващо-или. Тя е комутативна.

Пример:

$$\{a, b, c, d\} \triangle \{a, b, x, y\} = \{c, d, x, y\}$$

Операции върху множества

Допълнение (set complement)

Определение 7

Нака е дадено универсално множество, или универсум, U .
Допълнението на A до U е множеството:

$$\overline{A^U} = \{a \mid a \in U \wedge a \notin A\}$$

Ако U се подразбира, пишем просто " $\overline{A}$ ".

Разликата е аналог на логическия съюз отрицание.

Пример: ако $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, то

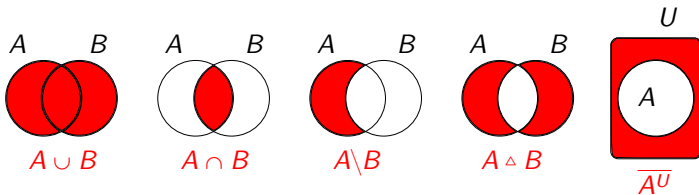
$$\overline{\{a, b, c, d\}} = \{e, f, g, h\}$$

ВАЖНО: най-голям универсум **няма**.

Операции върху множества

Илюстрации с диаграми на Venn

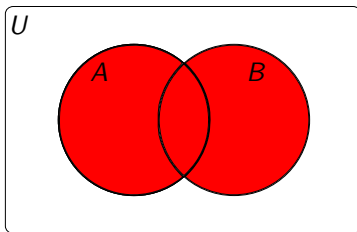
При две множества: две окръжности в общо положение.



Операции върху множества

Пълни диаграми на Venn: универсумът винаги присъства

Ако е нарисован и универсумът, районите са точно 2^n при n множества. Ето илюстрация на обединението: три от четирите района са включени в $A \cup B$, а един район (външният) не е включен.



Свойства на операциите върху множества (1)

Напълно аналогични на съответните свойства на логическите съюзи. Примерно, обединението и сечението са идемпотентни, комутативни и асоциативни, понеже съответно дизюнкцията и конюнкцията са такива:

$$\begin{aligned}A \cup A &= A, & A \cap A &= A, & A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A \\A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C, & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C\end{aligned}$$

Обединението и сечението дистрибутират едно спрямо друго:

$$\begin{aligned}A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

Свойства на операциите върху множества (2)

Свойствата на константите се пренасят директно върху операции с множества, ако празното множество съответства на F , а универсумът съответства на T :

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Законът за двойното отрицание от логиката има следния аналог:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Свойства на операциите върху множества (3)

Аналозите на законите на De Morgan са

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Свойства на операциите върху множества (4)

Асоциативните операции като обединение и сечение може да се обобщават недвусмислено така за $k > 2$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$$

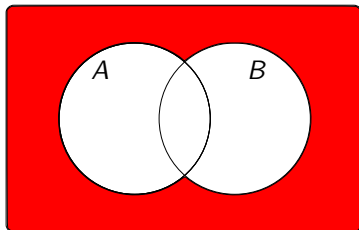
Ползваме следната нотация:

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

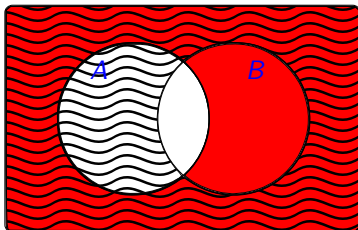
$$\bigcap_{i=1}^k A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k$$

Илюстрация на закон на De Morgan с диаграма на Venn

$$\overline{A \cup B}$$



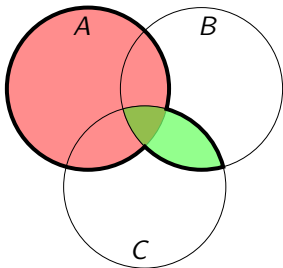
$$\overline{A} \cap \overline{B}$$



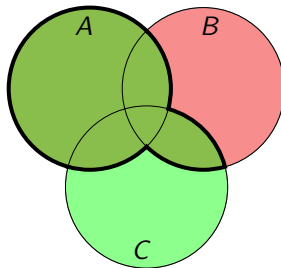
Диаграми на Venn за три множества

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup (B \cap C)$$



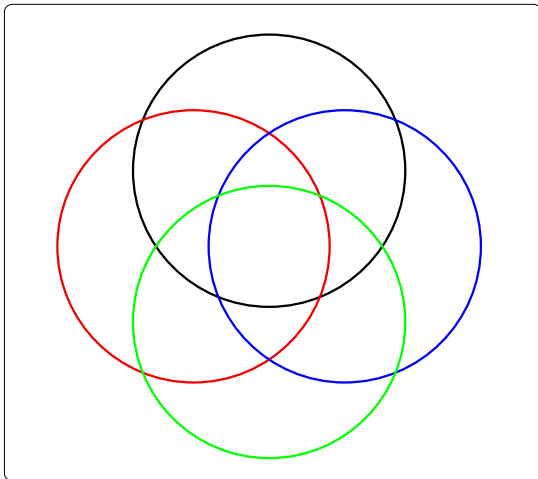
$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$



Диаграми на Venn за четири множества (1)

С окръжности не може

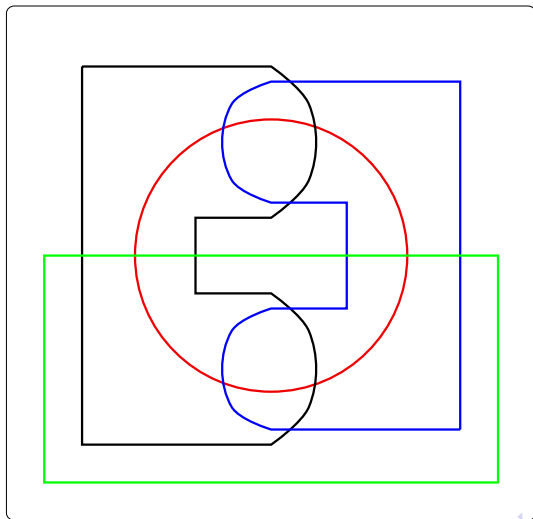
Не може да е диаграма на Venn за общия случай: има само 14 района. Липсват само-синьо-червен и само-черно-зелен.



Диаграми на Venn за четири множества (1)

С фигури, които не са непременно изпъкнали, може

Всички 16 района са налице.



Наредена двойка

Използваме кръгли скоби “(” и “)”, когато искаме да запишем обект, чиито елементи са наредени. *Наредената двойка*, чийто първи елемент е a и чийто втори елемент е b се записва така:

$$(a, b)$$

На английски терминът е *ordered pair*.

Основното свойство на наредените двойки

Следният важен резултат приемаме без доказателство.

Теорема 1

$(a, b) = (c, d)$ тстк $a = c$ и $b = d$.

Наредена тройка, четворка, $\dots$, k -торка

Обобщаваме “наредена двойка” за повече от два елемента така:

- (a, b, c) е наредена тройка (triple).
- (a, b, c, d) е наредена четворка (quadruple).
- $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ е наредена k -орка (k -tuple).

Нека A и B са множества. *Декартовото произведение на A и B* (Cartesian product) е множеството

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Пример: нека $A = \{1, 2\}$ и $B = \{a, b, c\}$. Тогава

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

В общия случай $A \times B \neq B \times A$. Тоест, операцията не е комутативна. Тя не е и асоциативна – защо?

Чрез неформално въведените понятия наредена тройка, наредена четворка и наредена k -торка можем да направим следните дефиниции. Нека $A, B, C, D, A_1, A_2, \dots, A_k$ са множества.

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \wedge d \in D\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_k \in A_k\}$$

Може да пишем “ $\bigtimes_{i=1}^k A_i$ ” наместо “ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ”.

Прието е Декартовото произведение $A \times A$ да се записва кратко като A^2 и да се нарича *Декартов квадрат*. Внимание! Това е формален запис, **абсолютно различен** от повдигането на число на квадрат!

Може да обобщим, че $A \times A \times A = A^3$ и изобщо $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = A^k$.

Често възприемаме този възглед: има първични, базови елементи, наречени *протоелементи*, които не са множества. Множеството, елементите на което са протоелементите, се нарича *опорното множество*, на английски е *ground set*. По правило опорното множество е непразно.

Ако опорното множество е A , всяко множество от подмножества на A наричаме *фамилия над A* (*family*).

Като пример, нека опорното множество е $A = \{a, b, c, d\}$. Фамилии над A са, примерно,

$$X = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}, \{b, d\}, \{d\}\}$$

$$Y = \{\{a, d\}\}$$

$$W = \{\emptyset\}$$

$$Z = \{\} = \emptyset$$

Нека A е опорното множество. *Покриване на A (set cover)* е всяка непразна фамилия $X = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ над A , такава че:

- ❶ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : X_i \subseteq A,$
- ❷ $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : X_i \neq \emptyset,$
- ❸ $\bigcup_{i=1}^k X_i = A.$

Ако освен това е вярно, че

- ❹ $\forall i \forall j (1 \leq i < j \leq k \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset)$

казваме, че X е *разбиване (set partition)* на A .

Пример за разбиване и покриване на множество

Нека $A = \{a, b, c, d\}$. Покриване на A е, примерно,

$$\{\{a, b, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$$

Разбиване на A е, примерно,

$$\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$$

Унарно обединение. Унарно сечение. (1)

Определение

Нека X е множество от множества над опорно множество A .
Тогава " $\bigcup X$ " означава обединението на множества-елементи на X :

$$\bigcup X = \{a \in A \mid (\exists S \in X : a \in S)\}$$

Забележете, че тази нотация не може да се използва, ако X не е множество от множества; тоест, ако X има елементи, които не са множества (а са протоелементи).

Дуалната нотация е " $\bigcap X$ ":

$$\bigcap X = \{a \in A \mid (\forall S \in X : a \in S)\}$$

Унарно обединение. Унарно сечение. (2)

Примери

Нека A е множество от протоелементи $A = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ (малките латински букви). Тогава:

$$\bigcup \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, x, z\}\} = \{a, b, c, d, e, x, z\}$$

$$\bigcap \{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, x, z\}\} = \{a\}$$

$$\bigcup \{\{a, b, c\}, \{\{a, d, e\}\}, \{a, x, z\}\} = \{a, b, c, x, z, \{a, d, e\}\}$$

$$\bigcap \{\{a, b, c\}, \{\{a, d, e\}\}, \{a, x, z\}\} = \emptyset$$

Синтактично неправилен запис е

$$\bigcup \{\{a, b, c\}, a, d, e, \{a, x, z\}\}$$

понеже нито a , нито d , нито e са множества. Този запис не означава никакво множество, дори и празното.

Индуктивно генерирани множества

Често разглеждаме множества, които могат да бъдат генерирани от следната процедура. Даден е някакво непразно множество M_0 и са дадени някакви операции. Ще използваме буквата “ M ” за името на множеството, което генерираме.

- Първо слагаме в M елементите на M_0 , тоест, присвояваме $M \leftarrow M_0$. Множеството M_0 се явява базото множество, или накратко базата.
- След това повтаряме неограничено следната стъпка:
 - Прилагаме по всички възможни начини дадените операции върху елементите на текущото M , като по този начин генерираме множество M' .
 - После добавяме елементите на M' към M ; по-прецизно казано, правим $M \leftarrow M \cup M'$.

Внимание! Не бъркайте “индуктивно генерирано множество” с “доказателство по индукция”. Това са принципно различни неща, макар между тях да има връзка: доказателствата по индукция се правят върху индуктивно генерирани множества.

Индуктивно генерирани множества: пример с $\mathbb{N}$.

Приемаме, че нулата е естествено число. Базовото множество е $\{0\}$, а множеството от операции е $\{\text{succ}\}$, където операцията succ (името идва от “successor”) от число е числото плюс едно; тоест, $\text{succ}(n) = n + 1$ за всяко естествено n .

- Прилагайки операцията succ по всевъзможните начини към $\{0\}$, получаваме 1. Добавяме 1 към $\mathbb{N}$ и то вече съдържа 0 и 1.
- Прилагайки операцията succ по всевъзможните начини към $\{0, 1\}$, получаваме 1 и 2. Добавяме 1 и 2 към $\mathbb{N}$ и то вече съдържа 0, 1 и 2.
- Прилагайки операцията succ по всевъзможните начини към $\{0, 1, 2\}$, получаваме 1, 2 и 3. Добавяме 1, 2 и 3 към $\mathbb{N}$ и то вече съдържа 0, 1, 2 и 3.
- И така нататък.

Пишем $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, като “...” в десния край казва, че този обект е безкраен.

Мултимножества (1)

Неформално: *мултимножество* (*multiset*) е нещо като множество, но многократните появи на даден елемент са от значение. Примерно, мултимножеството от три единици и една двойка е различно от мултимножеството от две единици и една двойка.

При мултимножествата няма наредба, също като в обикновените множества няма наредба.

Няма утвърдена нотация за мултимножествата. Авторът ползва нотация с фигурни скоби, но с един субскрипт “M”:

$$\{1, 1, 1, 2\}_M$$

И така, $\{1, 1, 1, 2\}_M = \{1, 2, 1, 1\}_M$, но $\{1, 1, 1, 2\}_M \neq \{1, 2, 1\}_M$.

Мултимножества (2)

Можем спокойно да минем без понятието “мултимножество”. То изглежда обобщение на “множество”, но можем да ползваме “множество” и “кратност”, за да изразим това, което изразяваме чрез “мултимножество”.

От друга страна, “мултимножество” е много удобно и ще се ползва в изложенията за комбинаторни конфигурации (структури) и рекуренти уравнения. Единствената операция, която въвеждаме за мултимножества, е обединение. То е подобно на обединението на обикновени множества, но кратностите се сумират. Примерно,

$$\{a, a, b, c, c, d\}_M \cup \{a, b, b, f\}_M = \{a, a, a, b, b, b, c, c, d, f\}_M$$

КРАЙ