

Дискретни структури, лекция 2: доказателства по индукция

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

18 август 2025 г.

Типичната ситуация е такава. Даден е предикат $P(n)$ и трябва да докажем $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$. Схемата на доказателствата по индукция върху естествените числа е следната.

- Доказваме $P(0)$, като просто проверяваме истинността на предиката за $n = 0$.
- Допускаме $P(n)$ за произволно $n \in \mathbb{N}$ и въз основа на това допускане доказваме $P(n + 1)$.

Примери за доказателство по индукция

Съвсем прост пример (1)

Ще докажем, че за всяко естествено n е в сила
 $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Накратко, $\forall n \in \mathbb{N}^+$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

База: $n = 0$. Лявата страна на (1) е $\sum_{i=1}^0 i = \sum_{1 \leq i \leq 0} i = 0$
(сумираме върху празно м-во от индекси). Дясната страна на
(1) е $\frac{0(0+1)}{2} = 0$. ✓

Индуктивно предположение: допусκαе, че (1) е в сила за някое
 $n \geq 0$.

Ще докажем (1) за стойност на аргумента $n + 1$, тоест

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (2)$$

Примери за доказателство по индукция

Съвсем прост пример (2)

Започваме от лявата страна на (2):

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \quad // \text{ св-ва на сумирането}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n i \right) + (n+1) = \quad // \text{ индуктивното предположение}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Но това е дясната страна на (2). ✓

Примери за доказателство по индукция

По-сложен пример (1)

Числата на Fibonacci са $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 2$. Докажете, че за всяко $n \geq 1$:

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (3)$$

Доказателство.

Базата е $n = 1$ (а не $n = 0$). Ако $n = 1$, то (3) става $F_0F_2 - F_1^2 = (-1)^1$, тоест $0 \cdot 1 - 1 = -1$, което очевидно е вярно. ✓

Индуктивното предположение е, че за някое (а не за всяко!) $n \geq 1$ е изпълнено $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Примери за доказателство по индукция

По-сложен пример (2)

В индуктивната стъпка разглеждаме ст-ст на аргумента $n + 1$.
Ще докажем, че $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Допускането беше

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Умножаваме по -1 :

$$F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

Заместваме F_{n-1} с $F_{n+1} - F_n$:

$$F_n^2 - (F_{n+1} - F_n) F_{n+1} = (-1)^{n+1} \leftrightarrow$$

$$F_n^2 + F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \leftrightarrow$$

$$F_n (F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

Но $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, така че $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. **QED**

Даден е предикат $P(n)$ и трябва да докажем $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.
Схемата на доказателствата със силна индукция върху естествените числа е следната.

- Доказваме $P(0)$, като просто проверяваме истинността на предиката за $n = 0$.
- Допускаме, че за **произволно** $n \in \mathbb{N}$ са изпълнени:
 - $P(0)$,
 - $P(1)$,
 - $\dots$,
 - $P(n)$

Въз основа на тези допускания, или само част от тях, доказваме $P(n + 1)$.

Пример за доказателство със силна индукция (1)

Теорема 1

Всяко естествено число, по-голямо или равно на 2, е произведение на едно или повече прости числа.

Доказателство: Ще докажем теоремата със силна индукция. Базата е $n = 2$ (а не $n = 0$). Твърдението за стойност на аргумента 2 е тривиално вярно: 2 е произведение на едно просто число, а именно 2. С това доказахме базовия случай.

Индуктивното предположение е, че за произволно $n \geq 2$ е вярно, че за всяко $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ е вярно, че k е произведение от едно или повече прости числа.

Пример за доказателство със силна индукция (2)

В индуктивната стъпка разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n + 1$. Следните подслучаи са изчерпателни:

- $n + 1$ е просто. Тогава $n + 1$ се явява произведение на едно просто число.
- $n + 1$ е съставно. Тогава по дефиниция $n + 1 = p \cdot q$, където $p, q \in \{2, 3, \dots, n\}$. Съгласно индуктивното предположение, и p , и q са произведения от едно или повече прости числа. Тогава $n + 1$ е произведение от едно или повече прости числа. **QED**

Силната индукция е еквивалентна на обикновената

Силната индукция е еквивалентна на обикновената, а се казва “силна” по дидактични причини. Дефинираме предиката $Q(n)$ така:

$$P(k) \text{ е в сила за } k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Тоест, $Q(n)$ е $P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n-1) \wedge P(n)$.

Да докажем $P(n)$ със силна индукция е същото като да докажем $Q(n)$ с обикновена индукция.

Структурна индукция

Доказваме предикат $P(x)$, като домейнът е някакво индуктивно дефинирано множество M с база M_0 и някакво множество от операции $\mathcal{F}$. Схемата е тази.

- За всеки елемент x от M_0 проверяваме истинността на $P(x)$.
- Допускаме $P(x)$ за **произволно** $x \in M$ и въз основа на това допускане доказваме, че за всеки y , който се получава при прилагането на операциите от $\mathcal{F}$ върху текущото M , $P(y)$ е вярно.

Тази индукция се казва *структурна индукция*, на английски е *structural induction*, и се прилага широко в области като теорията на графите.

Всъщност, всяка индукция е структурна. Обикновената е върху естествените числа, а те са индуктивно дефинирано множество. Говорим за структурна индукция като нещо отделно по дидактични причини.

КРАЙ