

Лекция 3: Релации

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

10 ноември 2025 г.

Определение на “бинарна релация”

Определение 1

Нека A_1 и A_2 са множества, наречени съответно първи домейн и втори домейн. Бинарна релация с първи домейн A_1 и втори домейн A_2 се нарича всяко множество

$$R \subseteq A_1 \times A_2$$

Ако $A_1 = A_2$, казваме, че R е хомогенна. Нека $A = A_1 = A_2$. Може да кажем, че R е над Декартовия квадрат A^2 .

Алтернативно, A_1 се нарича “дефиниционна област”, а A_2 се нарича “област от стойностите”.

Ако е изпълнено $\forall x \in A_1 \exists y \in A_2 : (x, y) \in R$, то R е *тотална*.

Ако кажем “ R е релация” без повече уточнения, подразбираме, че R е хомогенна.

Примери за релации

$<, \leq, >, \geq$ и $=$ са релации над Декартовия квадрат $\mathbb{R}^2$.

Съгласно определението, всяка от тях е множество от наредени двойки от реални числа. Вярно е, че $(1, 2) \in <$, $(1, 2) \in \leq$, $(1, 1) \in \leq$, $(1, 1) \notin <$, и така нататък.

Нека S е множество. Дефинираме релацията $\subseteq_S$ над Декартовия квадрат $2^S \times 2^S$ така:

$$\forall a, b \in 2^S \quad ((a, b) \in \subseteq_S \stackrel{\text{def}}{\iff} a \subseteq b)$$

Примерно, нека $S = \{a, b\}$. Вярно, че $(\{a\}, \{a, b\}) \in \subseteq_S$, $(\{a, b\}, \{a\}) \notin \subseteq_S$, и така нататък.

Инфиксен запис при релации

Нека $R \subseteq A_1 \times A_2$. Наместо да пишем " $(x, y) \in R$ ", където $x \in A_1$ и $y \in A_2$, пишем много по-прегледното " $x R y$ ". Това е *инфиксен запис*: символът на релацията се записва между елементите.

Това е записът, познат ни от училище. Примерно, " $1 < 2$ " вместо " $(1, 2) \in <$ ", " $2 \nless 1$ " вместо " $(2, 1) \notin <$ ", и така нататък.

За теоретико-множествената дефиниция на “релация”

Релация означава отношение. Това не може да е дефиниция: а какво е отношение?

Не искаме да въвеждаме ново първично понятие, ако можем да го избегнем. Вече сме въвели “множество” като първично понятие. Всяко друго понятие изграждаме чрез “множество” и естествени езикови конструкции.

Формалната теоретико-множествена дефиниция е смислена: за да определим дадена релация, казваме кои наредени двойки от елементи участват в нея. Като пример да разгледаме бинарната релация на приятелство над някакво множество от хора. Първо, приемаме, че приятелството е или-или; няма степени на приятелство. Второ, от формална гледна точка, приятелството се определя от двойките хора, които са приятели и това е всичко.

Композиция на релации

Нека $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$ са релации. Композицията на Q върху R е релацията $Q \circ R \subseteq A \times C$, дефинирана така:

$$Q \circ R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q)\}$$

Примерно, ако $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
 $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$ и
 $Q = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \gamma), (4, \gamma)\}$, то

$$Q \circ R = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \alpha), (b, \gamma), (d, \gamma)\} \quad (1)$$

Композицията не е комутативна! В общия случай,
 $Q \circ R \neq R \circ Q$. Това обяснява израза “композицията на Q върху R ”.

Обратната релация.

Нека $R \subseteq A \times B$ е релация. Нейната *обратна релация*, която бележим с " R^{-1} ", се дефинира така:

$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

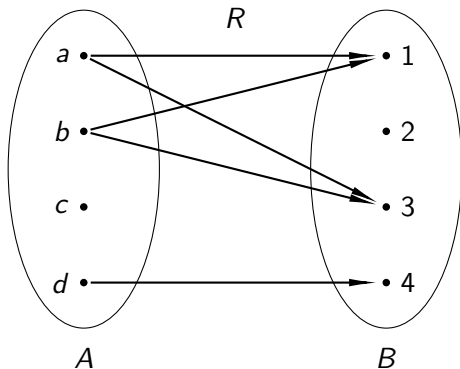
Примерно, ако $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$, то $R^{-1} = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (4, d)\}$.

Очевидно $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Представяния на релации с диаграми

Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ и $R \subseteq A \times B$.

Представяме R чрез диаграма от точки и стрелки, като точките отговарят на е-тите на A и B , а стрелка от a_i към b_j има тстк $a_i R b_j$. Точките, съотв. на е-нтите на A , са в елипса вляво, а точките, съотв. на е-нтите на B , са в елипса вдясно. Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$.

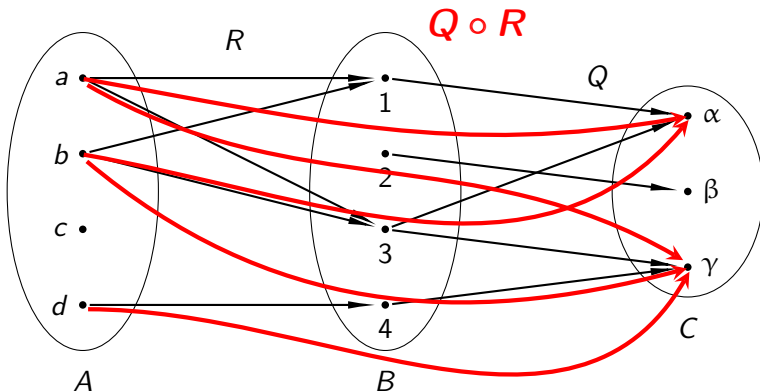


Илюстрация на композиция на релации с диагр.

Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

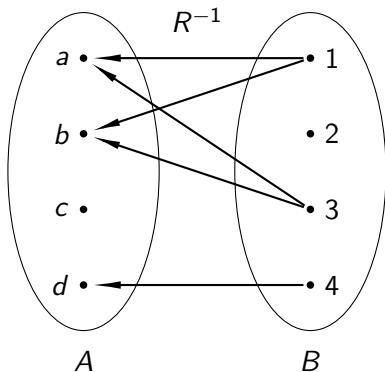
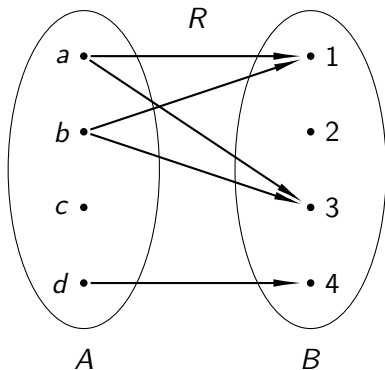
$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$ и

$Q = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \gamma), (4, \gamma)\}$. $Q \circ R$ се илюстрира така:



Илюстрация на обратната релация с диаграма.

Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и
 $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$. Както знаем,
 $R^{-1} = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (4, d)\}$.



Композицията на релации е асоциативна

Въведение в доказателството (1)

Теорема 1

$$P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$$

Доказателство: Неявно, има общо четири домейна. Да ги наречем A , B , C и D . Да определим кой е първият и кой е вторият домейн на всяка от P , Q , R .

Приемаме именуването от Слайд 6 за Q и R : $R \subseteq A \times B$ и

$Q \subseteq B \times C$, така че $Q \circ R \subseteq A \times C$: $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{Q} C$.

Нека $S = Q \circ R$. Тогава $S \subseteq A \times C$: $A \xrightarrow{S} C$ и $P \circ (Q \circ R)$ е $P \circ S$. Първият домейн на $P \circ S$ е първият домейн на S , т.е., A . Вторият домейн на $P \circ S$ е вторият домейн на P , който трябва да е D : $A \xrightarrow{S} C \xrightarrow{P} D$. Очевидно $P \subseteq C \times D$.

Композицията на релации е асоциативна

Въведение в доказателството (2)

Разглеждаме $P \circ Q$. Както знаем, $Q \subseteq B \times C$ и $P \subseteq C \times D$,

така че $P \circ Q \subseteq B \times D$: $B \xrightarrow{Q} C \xrightarrow{P} D$.

Нека $T = P \circ Q$. Тогава $T \subseteq B \times D$: $B \xrightarrow{T} D$ и $(P \circ Q) \circ R$ е $T \circ R$. Първият домейн на $T \circ R$ е първият домейн на R , тоест A . Вторият домейн на $T \circ R$ е вторият домейн на T , тоест D :

$$A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{T} D.$$

Ще докажем, че $P \circ S = T \circ R$. Забелязваме, че $P \circ S \subseteq A \times D$ и $T \circ R \subseteq A \times D$, тоест, първият и вторият домейн и на двете релации са равни. Ще покажем, че

$$\forall (x, z) \in A \times D \left((x, z) \in P \circ S \leftrightarrow (x, z) \in T \circ R \right) \quad (2)$$

От това следва, че $P \circ S = T \circ R$.

Композицията на релации е асоциативна

Формалното доказателство

$$\begin{aligned}(x, z) \in P \circ (Q \circ R) &\leftrightarrow \exists w \in C : (x, w) \in Q \circ R \wedge (w, z) \in P \leftrightarrow \\ \exists w \in C : (\exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (y, w) \in Q) \wedge (w, z) \in P &\leftrightarrow \\ \exists w \in C \exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (y, w) \in Q \wedge (w, z) \in P &\leftrightarrow \\ \exists y \in B \exists w \in C : (x, y) \in R \wedge (y, w) \in Q \wedge (w, z) \in P &\leftrightarrow \\ \exists y \in B \exists w \in C : (x, y) \in R \wedge ((y, w) \in Q \wedge (w, z) \in P) &\leftrightarrow \\ \exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (\exists w \in C : (y, w) \in Q \wedge (w, z) \in P) &\leftrightarrow \\ \exists y \in B : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in P \circ Q &\leftrightarrow \\ (x, z) \in (P \circ Q) \circ R\end{aligned}$$

Което и трябваше да покажем.



Теорема 2

$$(Q \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ Q^{-1}$$

Доказателство: Нека $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$. Тогава $Q \circ R \subseteq A \times C$, така че $(Q \circ R)^{-1} \subseteq C \times A$.

$$\begin{aligned}(x, z) \in (Q \circ R)^{-1} &\leftrightarrow (z, x) \in Q \circ R \leftrightarrow \\ \exists y \in B : (z, y) \in R \wedge (y, x) \in Q &\leftrightarrow \\ \exists y \in B : (y, z) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in Q^{-1} &\leftrightarrow \\ \exists y \in B : (x, y) \in Q^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} &\leftrightarrow \\ (x, z) \in R^{-1} \circ Q^{-1}\end{aligned}$$

Кое то и трябваше да покажем. □

Представяния на хомогенни релации с матрици

Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Нека $R \subseteq A^2$. Можем да представим R чрез булева матрица $n \times n$, в която клетката на ред i и колона j е

- 1, ако $a_i R a_j$,
- 0, в противен случай.

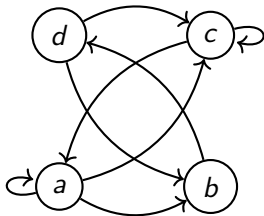
Например, нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)\}$. Тогава R се представя със следната матрица:

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	1	0

Представяния на хомогенни релации с диаграми

Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Нека $R \subseteq A^2$. Можем да представим R чрез диаграма от точки и стрелки, в която на всяко a_i съответства отделна точка, наречена *върх*, а стрелка от върха, съответен на a_i до върха, съответен на a_j , се поставя тогава и само тогава, когато $a_i R a_j$.

Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)\}$. Тогава R се представя така:



Само за хомогенните релации дефинираме следните шест свойства.

- рефлексивност
- антирефлексивност
- симетричност
- антисиметричност
- силна антисиметричност
- транзитивност

Свойства на релациите

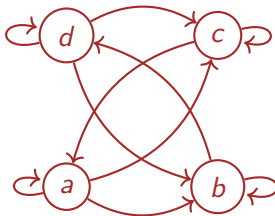
Рефлексивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е *рефлексивна* тстк $\forall a \in A : aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само единици.

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	1	1

В представяне с диаграми, всеки връх има примка.



Свойства на релациите

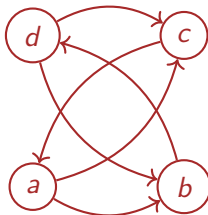
Антирефлексивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е *антирефлексивна* тстк $\forall a \in A: \neg aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само нули.

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, нито един връх няма примка.



Свойства на релациите

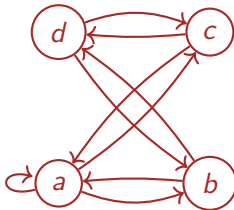
Симетричност

Нека $R \subseteq A^2$. R е симетрична тстк $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow bRa$.

В матрично представяне, матрицата е симетрична спрямо главния диагонал. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	1	0	0	1
c	1	0	0	1
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, или има и двете стрелки от единия до другия, или няма нито едната стрелка от единия до другия.



Свойства на релациите

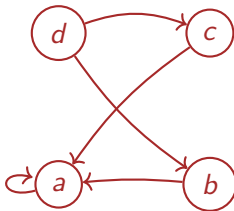
Антисиметричност

Нека $R \subseteq A^2$. R е *антисиметрична* тстк
 $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow \neg bRa$.

В матрично представяне, матрицата няма симетрична спрямо главния диагонал двойка единици. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	1	0	0	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, няма два различни върха, такива че има стрелка от първия до втория и от втория до първия.



Свойства на релациите

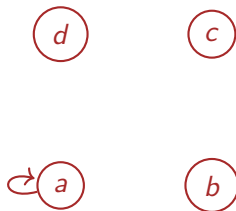
Антисиметричност (2)

Симетричността и антисиметричността не са взаимно изключващи се съгласно формалните дефиниции. Може релация $R \subseteq A^2$ да е симетрична и антисиметрична.

В матрично представяне, извън главния диагонал са само нули. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, и двете стрелки отсъстват. Примките са без значение.



Следните дефиниции са еквивалентни:

$$\forall a, b \in A : a \neq b \rightarrow (aRb \rightarrow \neg bRa)$$

$$\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$$

Дефинираме прости съждения p, q, r така: $\boxed{aRb}$ е p , $\boxed{bRa}$ е q , $\boxed{a = b}$ е r . Твърди се, че

$$\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

Наистина,

$$p \wedge q \rightarrow r \equiv \neg(p \wedge q) \vee r \equiv \neg p \vee \neg q \vee r \equiv$$

$$\neg \neg r \vee \neg p \vee \neg q \equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \equiv \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$$

Свойства на релациите

Силна антисиметричност

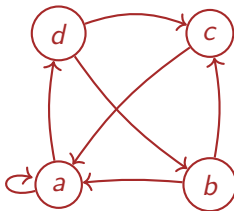
Нека $R \subseteq A^2$. R е силно антисиметрична тстк

$$\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa.$$

В матрично представяне, всяка двойка клетки, симетрични спрямо главния диагонал, съдържа протиположни стойности. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	0	1	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, точно едната стрелка е налична. Примките са без значение.



Свойства на релациите

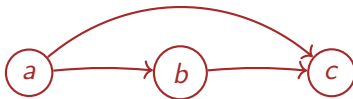
Транзитивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е транзитивна тстк

$\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Нищо не налага a , b и c да са различни!

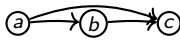
В матрично представяне транзитивността се описва трوماво, що се отнася до разчитане от човек.

В представяне с диаграми, типичното описание на транзитивността е следното.



Свойства на релациите

Транзитивност (2)

Това описание на транзитивността  е смислено само при $a \neq b \neq c \neq a$ (неравенството не е транзитивно!).

- Ако $a = b = c$, дали този елемент има примка или няма е без значение за транзитивността:  ✓ или  ✓.
- Ако $a = b \neq c$:
 - ако поне едната стрелка от единия до другия липсва, тази двойка “не пречи” на транзитивността:    ✓,   ✓,  ✓.
 - ако и двете стрелки между тях са налице, ако поне единият няма примка, тази двойка “пречи” на транзитивността, иначе “не пречи”:   ✗,   ✓.

Затваряния на релации (closures)

Нека $R \subseteq A^2$. *Рефлексивното затваряне на R* е минималното множество $R' \subseteq A^2$, такова че $R' \supseteq R$ и R' е рефлексивна релация.

“ R' е минималното множество” означава, че за всяко $R'' \subseteq A^2$, такова че $R'' \supseteq R$ и R'' е рефлексивна, е вярно, че $R'' \supseteq R'$.

Симетричното затваряне на R и транзитивното затваряне на R се дефинират напълно аналогично: заменяме “рефлексивна” със “симетрична” и “транзитивна”.

Релация е рефлексивна тстк съвпада с рефлексивното си затваряне. Аналогично за симетричното и транзитивното затваряне.

Конструирание на затваряния на релации

Нека A е крайно и релациите са представени с матрици.

- Рефлексивното затваряне се получава с едно сканиране на главния диагонал и обръщане на всяка нула в единица.
- Симетричното затваряне се получава чрез сканиране за двойки $(0, 1)$ или $(1, 0)$, които са симетрични спрямо главния диагонал, и обръщане на нулата от двойката в единица.
- Транзитивното затваряне се получава по-сложно (нещо като умножение на матрицата със себе си $n - 1$ пъти).

Релация е *релация на еквивалентност* тстк е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

От разгледаните досега релации над реалните числа само $=$ е релация на еквивалентност.

Релации на еквивалентност – пример

Ще разгледаме друга релация на еквивалентност. Нека S е множеството от всички булеви стрингове с дължина четири.

$$S = \{0000, 0001, \dots, 1110, 1111\}$$

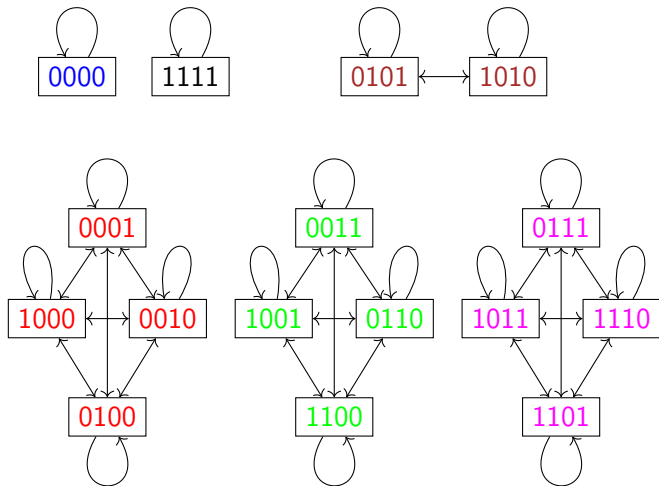
Да въведем релация $R \subseteq S^2$ така: за всеки $a, b \in S$, aRb тогава и само тогава, когато b е *ротация* на a . b е ротация на a тстк съществуват булеви стрингове b_1, b_2 със сумарна дължина четири (тоест, $|b_1| + |b_2| = 4$; b_1 или b_2 може да е празният стринг, тоест, може $|b_1| = 0$ или $|b_2| = 0$), такива че $b = b_1b_2$ и $a = b_2b_1$.

Примерно, 0001 е ротация на 0100 с $b_1 = 00$ и $b_2 = 01$, 0101 е ротация на 1010, и така нататък.

R е релация на еквивалентност.

Релации на еквивалентност – пример (2)

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111



Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всеки $a \in A$ дефинираме множеството $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid aRb\}$.

В примера от миналия слайд:

$$[0000] = \{0000\}$$

$$[0001] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

$$[0010] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

$$[0011] = \{0011, 0110, 1100, 1001\}$$

$$[0100] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

$$[0101] = \{0101, 1010\}$$

$$[0110] = \{0011, 0110, 1100, 1001\}$$

$$[0111] = \{0111, 1110, 1101, 1011\}$$

$$[1000] = \{0001, 0010, 0100, 1000\}$$

...

$$[1111] = \{1111\}$$

Теорема 3

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Тогава фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A .

В примера със стрингове, те са 16 на брой, но фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ има само шест елемента:

$\{ \{0000\}, \{1111\}, \{0001, 0010, 0100, 1000\},$
 $\{0101, 1010\}, \{0011, 0110, 1100, 1001\}, \{0111, 1110, 1101, 1011\} \}$

Очевидно тази фамилия е разбиване на S .

Класове на еквивалентност (3)

Доказателство на Теорема 3:

- $\forall Y \in \{[a] \mid a \in A\} : Y \subseteq A$. Това е очевидно. ✓
- $\forall Y \in \{[a] \mid a \in A\} : Y \neq \emptyset$, тъй като R е рефлексивна. ✓
- $\bigcup \{[a] \mid a \in A\} = A$. Това е очевидно. ✓
- Всеки два различни елемента на фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ имат празно сечение. Това е неочевидно.

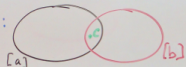
Класове на еквивалентност (4)

Лема $[a] \neq [b] \rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Д.вр Контрапозитивното е: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b]$

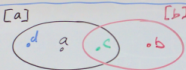
Допускаме, че $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ за някои $a, b \in A$

Визуално:



Щом $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, $\forall$
 $\exists c$, т.е. $c \in [a] \cap [b]$

Разглеждаме
произволен d от $[a]$:



Знаем, че $a \in [a]$.

Знаем, че $b \in [b]$.

От допусканията имаме $\begin{cases} c \in [a] \text{ (✓)} \\ c \in [b] \text{ (✓)} \end{cases}$

По дефиниция $[a] = \{x \in A \mid a R x\}$. Тогава $a R d$. Тогава $d R a$ (R е симетр.).

Също така $a R c$ (от $\oplus$). Щом $d R a$ и $a R c$, то $d R c$.

По деф. $[b] = \{x \in A \mid b R x\}$. Тогава $b R c$ (от $\oplus\oplus$). Тогава $c R b$ (R е симетр.).

Щом $d R c$ и $c R b$, то $d R b$ (R е транз.). Щом $d R b$, то $b R d$ (R е симетр.).

Щом $b R d$, то $d \in [b]$. Докажем, че $d \in [a] \rightarrow d \in [b]$, за произволен d .

Следователно $[a] \subseteq [b]$.

Аналогично доказваме, че $[b] \subseteq [a]$.

Прилагаме Аксиомата за обединение и получаваме: $[a] = [b]$

QED

Класове на еквивалентност (5)

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Съгласно Теорема 3, фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A . Елементите на тази фамилия се наричат *класове на еквивалентност на R* .

Щом научим или установим, че дадена релация е релация на еквивалентност, първо трябва да съобразим кои са нейните класове на еквивалентност. Те характеризират релацията напълно, тоест, първичната дефиниция на релация на еквивалентност може да стане чрез класовете на еквивалентност.

Частична наредба (partial order)

Релация е *частична наредба* тстк е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

От разгледаните релации върху реалните числа, $=$, $\leq$ и $\geq$ са частични наредби. $\subseteq_S$ също е частична наредба.

Релация е *строга частична наредба* (*strict partial order*) тстк е антирефлексивна, антисиметрична и транзитивна. От разгледаните релации върху реалните числа, $<$ и $>$ са строги частични наредби.

Ако $R \subseteq A \times A$ е (строга) частична наредба, казваме, че наредената двойка (A, R) е (строго) частично наредено множество, на английски *poset*.

Частично наредени множества $(A, \leq)$ и $(A, <)$

Буквите “ $\leq$ ” и “ $<$ ” се използват често за означаване на частични наредби и строги частични наредби, без да се има предвид непременно познатите ни релации върху реалните числа. По този начин, “ $\leq$ ” може да означава произволна частична наредба, а “ $<$ ” да означава произволна строга частична наредба. В такъв случай, “ $\leq$ ” и “ $<$ ” са просто букви, които сме избрали за означаване на релациите.

Ако е дадено частично наредено множество $(A, \leq)$ и “ $<$ ” не е дефинирана, по подразбиране “ $<$ ” означава следната релация: $< = \leq \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$. Очевидно тази релация е антирефлексивна (също като познатата ни $< \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Също така, тя е антисиметрична и транзитивна, което я прави строга частична наредба. Казваме $<$ е *строгата частична наредба*, асоциирана с $\leq$.

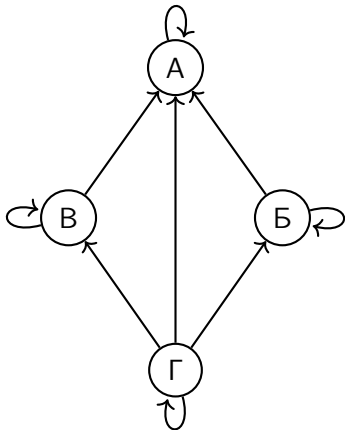
Частични наредби в практиката

Частични наредби се появяват, например, при класиране по два или повече критерии, които са еднакво важни, ако няма еднакви оценки. Оценките са не числа, а наредени двойки!

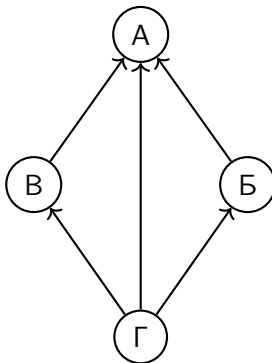
Нека класираме програмисти по *C* и *Java*, с оценка (x, y) , където x е оценката по *C*, а y , по *Java*. Ясно ли е как да класираме?

Не непременно. Ако Албена има $(6, 6)$, Борис има $(5, 5)$, Владо има $(4, 4)$ и Гергана има $(3, 3)$, нещата са ясни. Но ако Борис има $(5, 4)$, а Владо има $(4, 5)$, те двамата стават несравними.

При частичните наредби може (но не непременно!) да има *несравними елементи*. a и b са несравними, ако $\neg aRb$ и $\neg bRa$.



Частична наредба R .



Строгата частична наредба,
асоциирана с R .

Релации на линейна наредба (linear order)

Релация е *линейна наредба* тстк е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна, и е *строга линейна наредба*, ако е антирефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

Не може да има несравними двойки елементи заради силната антисиметричност.

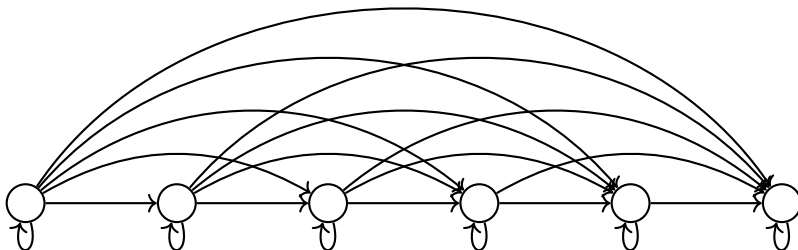
$A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Ако $R \subseteq A^2$ е линейна наредба, то R има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ елемента. Ако $R \subseteq A^2$ е строга линейна наредба, то R има точно $\frac{n(n-1)}{2}$ елемента.

Линейните наредби са частен случай на частичните наредби – всяка линейна е частична, но обратното не е вярно.

Аналогично, строгите линейни наредби са частен случай на строгите частични наредби.

Диаграмите на линейните наредби

Всяка линейна наредба над краен Декартов квадрат има диаграма, която е от този вид, или поне може да се нарисува по следния начин. Да кажем, че домейнът има шест елемента.



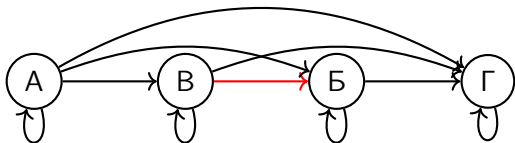
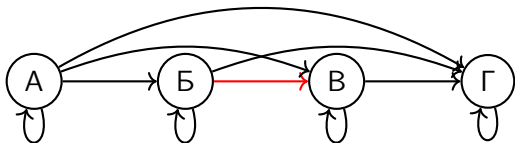
Влагане на частична в линейна наредба (linear extension)

Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че R се *влага* в R' . Алтернативно, казваме, че R' е *линейно разширение* на R .

При $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, броят на линейните разширения варира много: от 1 (самата R е линейна наредба) до $n!$ (няма сравними елементи в R).

Линейно разширение: пример

Релацията от Слайд 40 е частична наредба, но не е линейна наредба. Тя има точно две линейни разширения (има две възможности за отношението между Б и В).



Минимален и максимален елемент в частична наредба

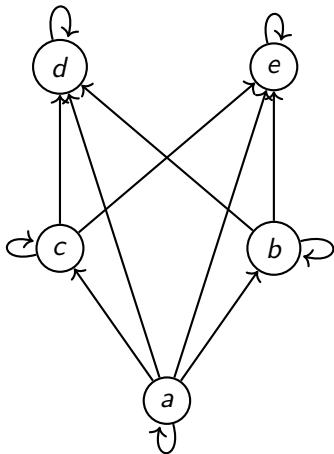
Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, че a е *минимален по отношение на R* , ако $\neg \exists b \in A \setminus \{a\} : bRa$.

Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A \setminus \{a\} : \neg bRa$. На английски е *minimal*. Ако R е строга, дефиницията е просто $\forall a \in A \neg \exists b \in A : bRa$.

Аналогично, a е *максимален по отношение на R* , ако $\neg \exists b \in A \setminus \{a\} : aRb$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A \setminus \{a\} : \neg aRb$. На английски е *minimal*.

Може да има повече от един минимален и повече от един максимален елемент. Може да няма минимален или максимален елемент.

Минимален и максимален елемент – примери



a е минималният, d и e са максималните.



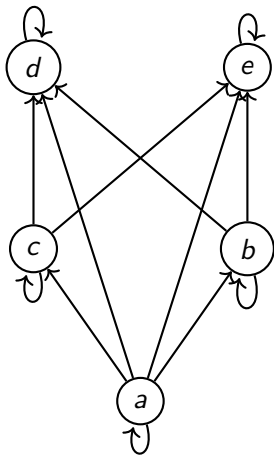
Всеки елемент е и минимален, и максимален.

Най-голям и най-малък елемент

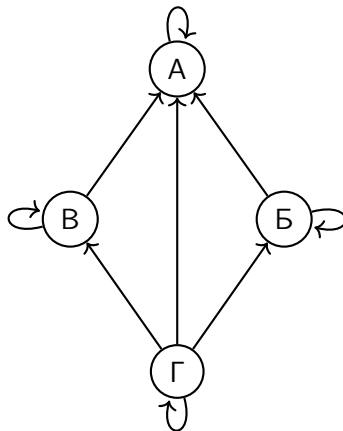
Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, че a е *най-малък по отношение на R* , ако $\forall b \in A : aRb$. На английски е *minimum*. Дуално, a е *най-голям по отношение на R* , ако $\forall b \in A : bRa$. На английски е *maximum*.

Елементарно се доказва, че ако има най-малък елемент, той е уникален: нека a е най-малък и нека c е най-малък, но тогава aRc и cRa , откъдето заключаваме, че $a = c$, понеже R е антисиметрична. Аналогично, ако има най-голям елемент, той е уникален.

Най-голям и най-малък елемент – примери



a е най-малък, най-голям няма.



А е най-голям, Г е най-малък.

Минимален/максимален; най-малък/най-голям елемент

Ако елемент е най-малък, той е минимален. Конверсното не е вярно. Ако елемент е най-голям, той е максимален. Конверсното не е вярно. Ако наредбата е линейна, “минимален” (“максимален”) и “най-малък” (“най-голям”) съвпадат.

Ако R е линейна наредба над краен домейн, има точно един най-малък и точно един най-голям елемент (които съвпадат тстк множеството има точно един елемент). Конверсното не е вярно: може да има точно един най-малък и точно един най-голям елемент, но наредбата да не е линейна – вижте примерите на Слайд 40.

Ако A е безкрайно, може да няма минимален или максимален елемент (което влече съответно, че няма най-малък или най-голям). Например, $\leq$ няма максимален елемент върху естествените числа, но има минимален елемент, който е и най-малък – нулата. Върху целите числа тя няма нито минимален, нито максимален елемент.

Частична наредба $\leq \subseteq A \times A$ е *фундирана* (*well-founded*), ако всяко непразно множество на A има минимален елемент.

Внимание: не става дума непременно за релацията “по-малко или равно” върху числа!

Без доказателство приемаме тази теорема: $\leq$ е фундирана тстк не съществува безкрайна редица $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ от елементи на A , такава че

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots$$

където $>$ е релацията $<^{-1}$, където $<$ е строгата наредба, асоциирана с $\leq$.

На прост български, наредба е фундирана тстк всяко непразно подмножество има начални елементи.

Частична наредба $\leq \subseteq A \times A$ е *добра наредба* (*well-ordered*), ако всяко непразно множество на A има най-малък елемент. Внимание: и тук не става дума непременно за релацията “по-малко или равно” върху числа!

Без доказателство приемаме тази теорема: $\leq$ е добра наредба тстк $\leq$ е линейна фундирана наредба.

На прост български, наредба е добра тстк всяко непразно подмножество има единствено начало.

За разликата между фундираните и добрите наредби

Нека $\leq \subset N^2 \times N^2$ е дефинирана така: $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ тстк $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$, където $\leq$ е познатата ни релация върху естествените числа.

$\leq$ е фундирана. Ето защо. Нека $S \subseteq N^2$ е непразно. Нека $S_1 = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists (x, y) \in S : a = x\}$. Нека $m_1 = \min S_1$. Такъв съществува. Нека $S_2 = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists (x, y) \in S : y = m_1\}$. Нека $m_2 = \min S_2$. Такъв съществува. Очевидно (m_1, m_2) е елемент на S и е минимален за S .

Но $\leq$ не е добра наредба. Тя може да има несравними елементи, примерно $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Ако $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, то S няма най-малък елемент по отношение на $\leq$.

КРАЙ