

Лекция 4: Функции

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

27 август 2025 г.

Определение 1 (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определение 2 (Тотална функция)

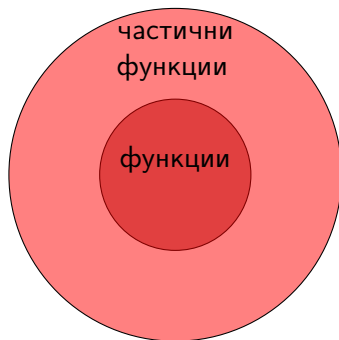
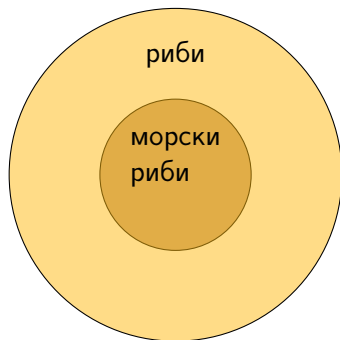
Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Частични функции и функции

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само “функция” е “тотална функция”. При дадени X и Y , очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само “функция” е частен случай на “частична функция”: всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.

Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.

Частични функции и функции (2)



За формалните определения

На практика често казваме “изображение” (mapping) вместо “функция”. Това обаче не е определение: а какво е “изображение”?

Предпочитаме да не въвеждаме “функция” като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме “функция” чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

Типични записи на функции

Наместо $f \subseteq X \times Y$, пишем $f : X \rightarrow Y$. Чете се “ f е функция с домейн X и кодомейн Y ”. Още може да се чете и като “ f изобразява X в Y ” или “ f е функция от X в Y ”.

Наместо $(x, y) \in f$ или инфиксния запис $x f y$, в контекста на функциите ползваме добре известния запис $f(x) = y$. Тук x е *променлива*. Променлива е нещо като кутийка, в която можем да слагаме неща (от домейна).

Дотук сме дефинирали “ $f(x)$ ”, където x е един елемент на домейна. Можем да обобщим този запис за подмножество на домейна: ако $X' \subseteq X$, то

$$f(X') = \{y \in Y \mid (\exists x \in X' : f(x) = y)\}$$

Алтернативно, $f(X') = \{f(x) \mid x \in X'\}$.

За домейна и кодомейна

Тъй като всяка частична функция $f : X \rightarrow Y$ е бинарна релация, определенията $\text{dom}(f)$ и $\text{range}(f)$ от лекцията за релации са в сила. Забележете, че $\text{dom}(f) \subseteq X$, като $\text{dom}(f) \subset X$ е възможно. Възможно е дори $X \neq \emptyset$ и $\text{dom}(f) = \emptyset$. На прост български, $\text{dom}(f)$ се състои от елементите на X , които имат образ под f .

От друга страна, ако f е тотална функция, то $\text{dom}(f) = X$, защото, по определение, всеки елемент от X има образ под f . Ерго, $f(X) = \text{range}(f)$ в този случай.

Очевидно $\text{range}(f) \subseteq Y$, като е възможно $\text{range}(f) \subset Y$ дори ако f е тотална. Не е възможно обаче $\text{range}(f) = \emptyset$, ако f е тотална и $X \neq \emptyset$: елементите на X трябва да се изобразяват в нещо.

Свикнали сме да мислим за функциите на много променливи като за обобщение на функциите на една променлива. Но всяка функция на k променливи в някакъв смисъл е функция на една променлива, която обаче е наредена k -орка.

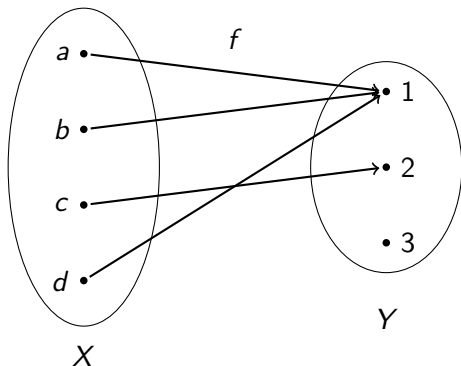
Пример: някаква реална функция на две променливи. Типичен запис е $g(x, y) = z$, където x , y и z са реални. Тогава $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Можем да мислим за g като функция на една променлива, която не е реално число, а наредена двойка от реални числа. Формално правилният запис би бил $g((x, y)) = z$, където $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но това не се ползва.

Забележка: множеството от реалните числа се бележи с $\mathbb{R}$.

Представяне на функция с диаграма

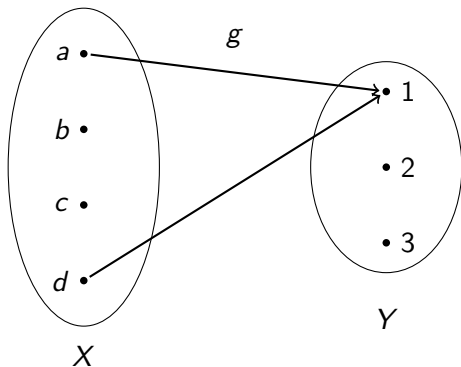
Частичните функции и тоталните функции са бинарни релации, така че може да се представят с диаграми като бинарни релации. Има обаче особености.

Нека $f : X \rightarrow Y$, като X и Y са крайни. Да кажем, $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза **точно** една стрелка.



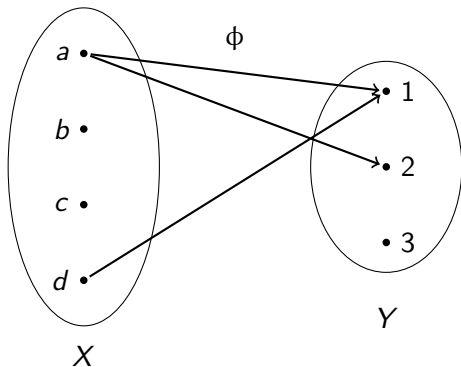
Представяне на частична функция с диаграма

Нека g е частична функция с домейн X и кодомейн Y . От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза не повече от една стрелка.



Диаграма на релация, която не е частична функция

Ако от поне една точка в елипсата, отговаряща на X , излиза повече от една стрелка, това не може да е диаграма на частична функция (оттам, и на тотална). Това е диаграма на релация ϕ с първи домейн X и втори домейн Y .

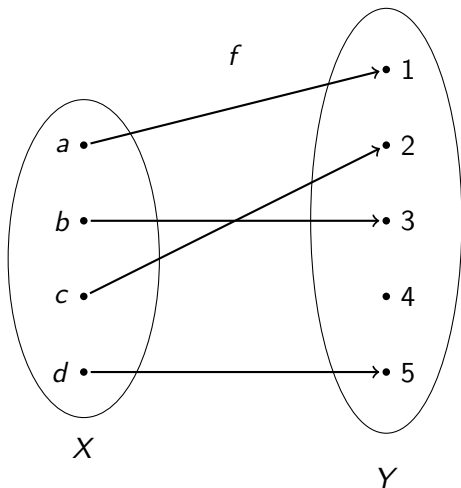


Инъекции, сюръекции, биекции

Инъекции

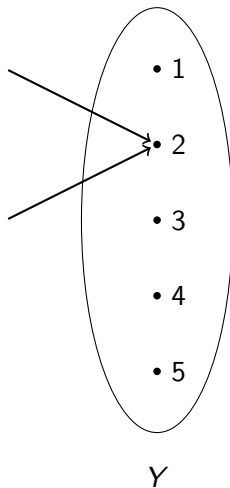
Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *инекция*, ако

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2.$$



Инекции, сюрекции, биекции

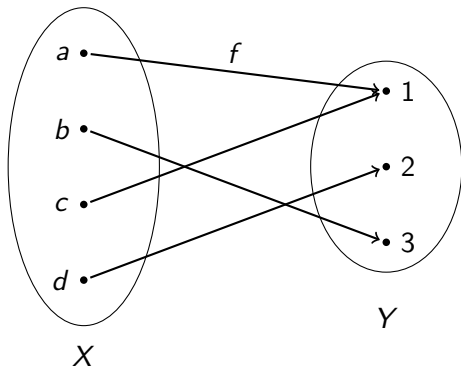
Контрапример за инекция



Инекции, сюрекции, биекции

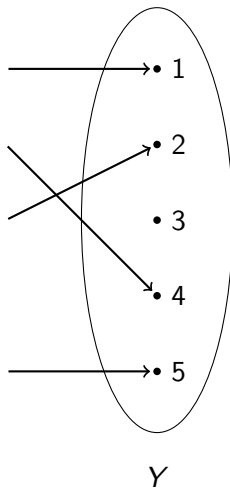
Сюрекции

Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *сюрекция*, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
Неформално: кодомейнът да бъде “покрит” от изображението.



Инекции, сюрекции, биекции

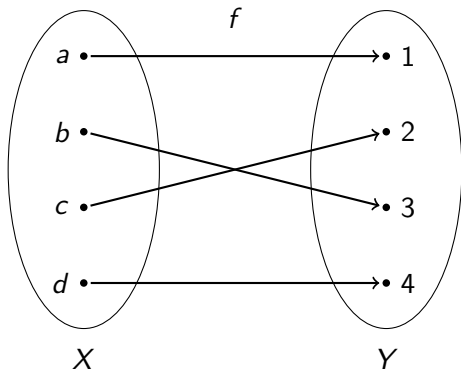
Контрапример за сюрекция



Инекции, сюрекции, биекции

Биекции

Нека $f : X \rightarrow Y$. f е биекция, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.



Инекции, сюрекции, биекции: житейски пример

Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако никой не седи на повече от един стол и няма правостоящи, то сядането е функция.

Ако сядането е функция и на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако сядането е функция и няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове и няма правостоящи, то сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Обратна функция на функция (1)

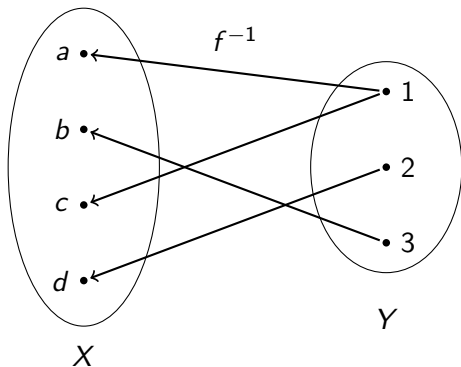
Всяка частична функция $f : X \rightarrow Y$ е релация, така че имаме право да говорим за обратната релация f^{-1} : понятие, което дефинирахме при релациите.

Обаче f^{-1} не е непременно частична функция! Лесно се вижда, че f^{-1} е частична функция тстк

$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$. Ако съществуват $x_1, x_2 \in X$, такива че $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то елементът $y \in Y$, за който $f(x_1) = f(x_2) = y$, ще има (поне) два различни образа под f^{-1} , което е забранено за частичните функции.

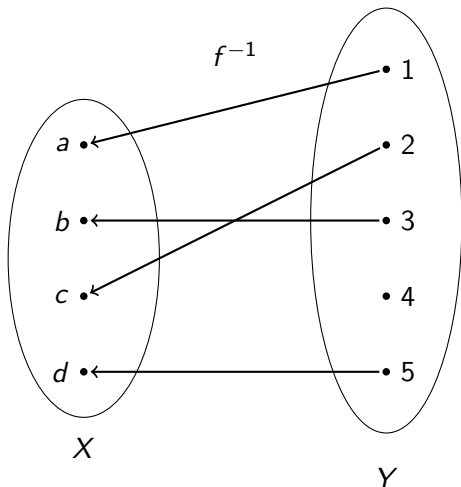
Обратна функция на функция (2)

Ето какво ще получим, ако “обърнем” сюрекцията от слайд 14 (тя не е инекция). Получаваме релация, която не е частична функция.



Обратна функция на функция (3)

Ако обърнем произволна инекция, ще получим частична функция, която не е непременно тотална функция. Ето какво ще получим, ако “обърнем” инекцията от слайд 12:



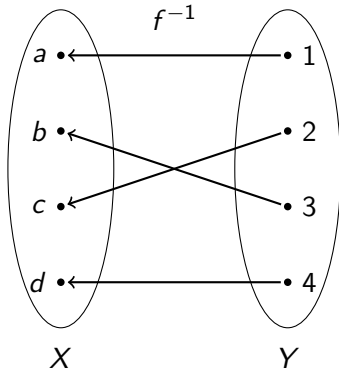
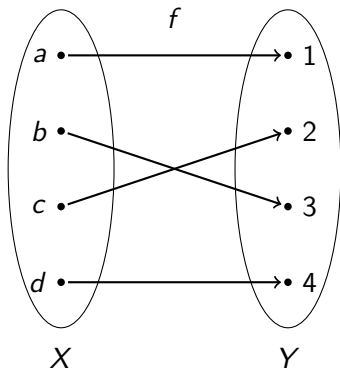
Обратна функция на биекция.

Очевидно е, че f и f^{-1} са тотални функции тстк f е биекция (алтернативно, тстк f^{-1} е биекция).

Очевидно е, че ако A и B са множества, то има биекция от A в B тстк има биекция от B в A .

Пример за обратна функция на биекция.

Нека f е биекцията от слайд 16. Ето диаграмите на f и f^{-1} :



КРАЙ