

Лекция 4: Крайни и безкрайни, изброими и неизброими множества

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

28 октомври 2025 г.

Крайни множества

Неправилна дефиниция

Дефиницията “множество е крайно, ако има краен брой елементи” е некоректна. По същество тя казва “множество е крайно, ако е крайно”. Очевидно това е порочно зациклена дефиниция!

Крайни множества и кардиналност

Правилна дефиниция

Дефинирането на “крайно множество” става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \dots, n\}$.

Определение 1 (крайно множество, кардиналност)

Множество A е крайно, ако

- или $A = \emptyset$, в който случай кардиналността на A е 0,*
- или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$; тогава кардиналността на A е n .*

На прост български, кардиналността на крайно множество A е броят на елементите на A и се бележи с $|A|$. “Кардиналността на множество A ” и “мощността на множество A ” са синоними.

Приемаме за очевидна следната теорема.

Теорема 1

Нека X и Y са крайни множества, като $|X| = m$ и $|Y| = n$.

- $m \leq n$ тстк съществува инекция от X в Y .
- $m = n$ тстк съществува биекция от X в Y .
- $m \geq n$ тстк съществува сюрекция от X в Y .

Определение 2 (безкрайно множество)

Множество е безкрайно, ако не е крайно.

Пример за безкрайно множество е $\mathbb{N}$: колкото и голямо естествено число n да вземем, $n + 1$ е по-голямо. Ерго, за всяко естествено n е вярно, че $n + 1 \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

Равномощни множества (равенства на кардиналности)

Следната дефиниция е в сила за крайни и за безкрайни м-ва.

Определение 3 (равномощност на множества)

Множества A и B са равномощни, или съизброими, тстк съществува биекция от едното в другото. Пишем $|A| = |B|$.

На английски терминът е *equinumerous*.

Ако A и B са крайни, записът “ $|A| = |B|$ ” касае равенство на числа, което вече видяхме в Теорема 1.

Ако A е безкрайно, нотацията “ $|A|$ ” се ползва и пак казваме, че е кардиналността на A , но сега смисълът е различен от брой елементи. Кардиналността на безкрайно множество е абстрактно понятие. Равенството на кардиналностите на безкрайни множества не е равенство на числа!

Свойства на равномощността на множества

Равномощността на множества е еквивалентност. Независимо от това дали A , B , C са крайни или безкрайни, равномощността на множества има тези свойства.

- $|A| = |A|$ (рефлексивност),
- $|A| = |B| \leftrightarrow |B| = |A|$ (симетричност),
- $|A| = |B| \wedge |B| = |C| \leftrightarrow |A| = |C|$ (транзитивност).

Ако множествата са крайни, тези свойства са свойства на релацията равенство върху числа, която е релация на еквивалентност. Ако обаче множествата са безкрайни, тези свойства следват от свойства на биекциите.

Неравенства между кардиналности чрез инекции

Следната нотация е в сила за крайни и за безкрайни м-ва.

Нотация 1 ($|A| \leq |B|$)

Ако има инекция от м-во A в м-во B , пишем $|A| \leq |B|$.

Ако A и B са крайни, то символът “ $\leq$ ” означава познатата ни релация на нестрого неравенство върху естествените числа и Теорема 1 ни дава право да се изразим така.

Ако обаче става дума за безкрайни множества или поне B е безкрайно, не става дума за брой елементи и $|A| \leq |B|$ не е неравенство между числа. В този случай, нотацията “ $|A| \leq |B|$ ” е формален запис на абстрактно свойство на A и B .

Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein

В следната теорема, A и B може да са крайни или безкрайни.

Теорема 2 (Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein)

Ако $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.

Доказателство: Ако става дума за крайни множества, то Теорема 1 доказва твърдението, понеже релацията $\leq$ върху естествените числа е антисиметрична. Интересен е случаят, в който множествата са безкрайни.

Следното доказателство е взето буквално от “Записки по дискретна математика” на доцент Христо Ганчев от ФМИ.

Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein

Една ключова лема (1)

Лема 1

Нека $C \subseteq A$ и $|A| \leq |C|$. Тогава $|A| = |C|$.

Доказателство: Ако $C = A$, няма какво да доказваме. Нека $C \subset A$. Разглеждаме произволна инекция $f : A \rightarrow C$.

Конструираме множествата $D_0, D_1, D_2, D_3, \dots$ ето така:

$$D_0 = A \setminus C$$

$$D_1 = f(D_0)$$

$$D_2 = f(D_1)$$

$$D_3 = f(D_2)$$

...

Накратко, $D_0 = A \setminus C$ и $D_{n+1} = f(D_n)$ за $n \geq 0$. Нека $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.

Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein

Една ключова лема (2)

Разглеждаме изображението $h : A \rightarrow A$, дефинирано така:

$$\forall x \in A : h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in D \\ x, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Сега ще докажем, че h е биекция от A в C .

❶ Ще докажем, че $\forall x \in A : h(x) \in C$.

- Ако $x \in D$, то $h(x) = f(x)$ по дефиницията на h . Но $f(x) \in C$, понеже C е кодомейнът на f .
- Ако $x \notin D$, то $h(x) = x$ по дефиницията на h . Но щом $x \notin D$, в частност $x \notin D_0$. Щом $x \notin D_0$, $x \in C$, понеже $D_0 = A \setminus C$.

Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein

Една ключова лема (3)

- ② Ще докажем, че h е инекция от A в C . Разглеждаме произволни $x, y \in A$, такива че $x \neq y$.
- Да допуснем, че $x \in D$ и $y \in D$. Тъй като f е инекция, изпълнено е $f(x) \neq f(y)$. Но $h(x) = f(x)$ и $h(y) = f(y)$, щом $x, y \in D$. Заклучаваме, че $h(x) \neq h(y)$.
 - Да допуснем, че $x \in D$ и $y \notin D$. Щом $x \in D$, $h(x) = f(x)$ по дефиницията на h . Щом $x \in D$, $f(x) \in D$. Ерго, $h(x) \in D$.

Щом $y \notin D$, $h(y) = y$. Тогава $h(y) \notin D$.

Заклучаваме, че $h(x) \neq h(y)$.

- Ако $x \notin D$ и $y \in D$, доказваме, че $h(x) \neq h(y)$ аналогично.
- Да допуснем, че $x \notin D$ и $y \notin D$. Тогава $h(x) = x$ и $h(y) = y$ по дефиницията на h . Заклучаваме, че $h(x) \neq h(y)$.

Заклучаваме, че h е инекция от A в C .

Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein

Една ключова лема (4)

3 Ще докажем, че h е сюрекция от A в C . Разглеждаме произволно $z \in C$.

- Да допуснем, че $z \in D$. Тогава $\exists n \in \mathbb{N} : z \in D_n$. Но $D_0 = A \setminus C$. Тогава $z \notin D_0$. Тогава $\exists n \in \mathbb{N}^+ : z \in D_n$. Но по дефиниция, $D_n = f(D_{n-1})$, щом $n > 0$. Тогава $\exists x \in D_{n-1} : f(x) = z$. Тогава $h(x) = f(x)$. Тогава $h(x) = z$.
- Да допуснем, че $z \notin D$. Тогава $h(z) = z$ по определението на h .

И в двата случая, z се явява образ на елемент под h .

Заклучаваме, че h е сюрекция от A в C .

Щом h е инекция и сюрекция от A в C , h е биекция от A в C .
Щом съществува биекция от A в C , в сила е $|A| = |C|$. С това доказахме Лема 1. □

Теорема на Cantor–Shröder–Bernstein

Доказателството на Теорема 2

Връщаме се на доказателството на Теорема 2. Нека $u : A \rightarrow B$ и $v : B \rightarrow A$ са инекции. Кодомейнът на v е A . Нека $C = v(B)$. Очевидно $C \subseteq A$. Очевидно v е инекция от B в C .

Но v е сюрекция от B в C , защото всеки елемент на C е образ на някой елемент на B под v . Щом v е инекция и сюрекция от B в C , v е биекция от B в C . Тогава $|B| = |C|$.

Разглеждаме $v \circ u$. Приемаме за очевидно, че композицията на инекции е инекция. Но u и v са инекции. Тогава $v \circ u$ е инекция. Нещо повече, тя е инекция от A в C . Щом има такава инекция, в сила е $|A| \leq |C|$. Щом $C \subseteq A$ и $|A| \leq |C|$, съгласно Лема 1, в сила е $|A| = |C|$.

Щом $|A| = |C|$ и $|B| = |C|$, в сила е $|A| = |B|$. Това е краят на доказателството на Теорема 2. $\square$

Определение 4 (изброимо безкрайно множество)

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.

Определение 5 (изброимо множество)

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно.

Определение 6 (неизброимо множество)

Множество е неизброимо, ако не е изброимо.

Очевидно всяко неизброимо множество е безкрайно. Не е очевидно, че съществуват неизброими множества.

Очевидно изброими безкрайни множества

$\mathbb{N}^+$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}^+ : f(n) = n - 1$.

$\mathbb{N}_e = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е четно}\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}_e \rightarrow \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}_e : f(n) = \frac{n}{2}$.

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е точна степен на } 2\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : M \rightarrow \mathbb{N}$, където $\forall n \in M : f(n) = \log_2 n$.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ където } \forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 2n - 1, & \text{ако } n > 0, \\ -2n, & \text{ако } n < 0. \end{cases}$$

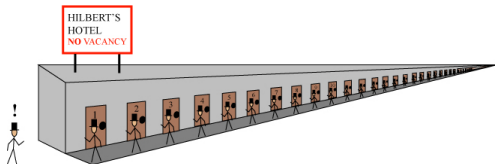
Изброяването е $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(-3) = 6$ и т. н. Ето наредбата:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots$$

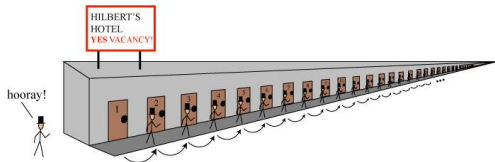
Безкрайността е КОНТРАИНТУИТИВНА

Хотелът на Hilbert

Хотел с безкрайно много стаи, номерирани с 1, 2, 3 и така нататък. Във всяка стая има гост.



Може ли хотелът да приюти нов гост? Колкото и да е контраинтуитивно, да: преместваме едновременно всеки от вече настанените в следващата стая.



Графиките са взети от Интернет от сайт без лицензи.

Теорема 3

Съществува биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Доказателство: Твърди се, че има начин да бъдат изброени наредените двойки от естествени числа.

Разбиваме множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ на подмножества $S_0, S_1, S_2, \dots$ по следния начин

$$\forall k \in \mathbb{N} : S_k = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = k\}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (2)

Изброяването е следното: при $i < j$, наредените двойки от S_i преди наредените двойки от S_j , а вътре във всяко S_i нареждаме двойките по нарастващ втори елемент:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(3, 0)	(2, 1)	(1, 2)	(0, 3)
$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$	$\underbrace{\hspace{2.5cm}}$		$\underbrace{\hspace{3.5cm}}$			$\underbrace{\hspace{4.5cm}}$			
S_0	S_1		S_2			S_3			

10	11	12	13	14	
(4, 0)	(3, 1)	(2, 1)	(1, 3)	(0, 4)	...
$\underbrace{\hspace{10cm}}$					
S_4					

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (3)

Да си представим наредените двойки (a, b) от естествени числа в безкрайна таблица.

(a, b) a	b	0	1	2	3	4	5	6	
0		(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	...
1		(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	...
2		(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	...
3		(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	...
4		(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	...
5		.	.	.	.	.	.	.	
6		.	.	.	.	.	.	.	

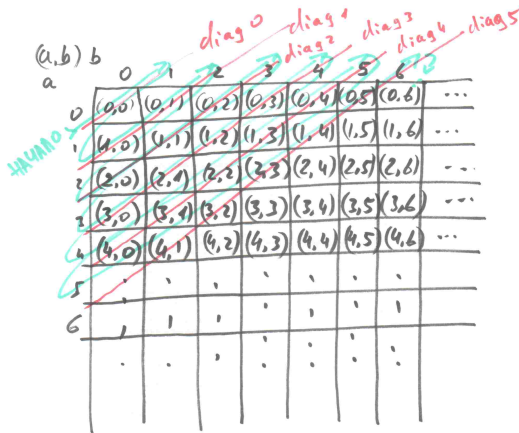
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (4)

Да групираме наредените двойки по диагонали. Тогава $diag_i$ съдържа точно елементите на S_i .

(a,b) b	0	1	2	3	4	5	6	
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	...
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	...
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	...
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	...
5	.	.	.	.	.	.	.	.
6	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (5)

Ето визуализация на изброяването



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (6)

Функцията на изброяването f

Да разгледаме следната функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f((a, b)) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a, b) = (0, 0) \\ \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, & \text{в противен случай} \end{cases} \quad (1)$$

Това е **формалното** описание на функцията на изброяването, която въведохме на слайд 19 и илюстрирахме на слайд 22.

Лема 2

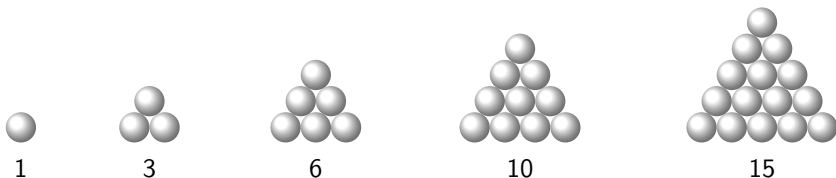
Функцията на изброяването f , дефинирана в (1), е инекция.

Преди формалното доказателство на Лема 2, малко пояснения за смисъла на израза вдясно в (1).

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (7)

Пояснения към функцията на изброяването (1)

Числата от вида $\frac{k(k+1)}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$ се наричат *триъгълните числа*. В нарастващ ред на k , редицата от триъгълните числа започва така: 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Следната визуализация за $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ показва защо се наричат “триъгълните числа”.



Лесно се вижда, че триъгълните числа са точно сумите $\sum_{i=0}^k i$, за $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (8)

Пояснения към функцията на изброяването (2)

В (1), в израза $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$:

- Събираемото $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е броят на наредените двойки във всички диагонали преди диагонал номер $a + b$.
То е триъгълното число

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (a+b)$$

Забележете, че диагонал номер $a + b$ съдържа точно $a + b + 1$ наредени двойки.

- Събираемото b е броят на наредените двойки преди (a, b) в диагонал номер $a + b$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (9)

Доказателството на Лема 2 (1)

Да допуснем, че f не е инекция. Тогава съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$. Нека $a_1 + b_1 = m_1$ и $a_2 + b_2 = m_2$.

Случай 1: $m_1 \neq m_2$. БОО, нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа, като $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Ще докажем, че $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Наистина,

$$\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2} \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2}(m_2^2 + m_2 - m_1^2 - m_1) \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2}((m_2 - m_1)(m_2 + m_1) + (m_2 - m_1)) \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (10)

Доказателството на Лема 2 (2)

Но $m_2 - m_1 \geq 1$, понеже $m_2 > m_1$ по допускане. Да разгледаме множителя $m_2 + m_1 + 1$. Но това е $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1$.

Очевидно $a_2 + b_2 > b_1$ в текущите допускания, а също така $b_1 + 1 > b_1$. Тогава $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1 > 2b_1$. Тогава

$$\frac{1}{2}(\underbrace{m_2 - m_1}_{\geq 1})(\underbrace{m_2 + m_1 + 1}_{> 2b_1}) > b_1.$$

Доказахме, че $b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 = f((a_1, b_1))$, а $\frac{m_2(m_2+1)}{2} \leq f((a_2, b_2))$. Показахме, че $f((a_1, b_1)) < f((a_2, b_2))$.

Заклучаваме, че допускането, че $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, е погрешно в **Случай 1**. ⚡

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (11)

Доказателството на Лема 2 (3)

Случай 2: $m_1 = m_2$. Тогава трябва b_1 да е различно от b_2 , иначе $a_1 = a_2$, което влече $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Щом $b_1 \neq b_2$ и $m_1 = m_2$, то $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$. С други думи, $f((a_1, b_1)) \neq f((a_2, b_2))$. Заклучаваме, че допускането, че $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, е погрешно в **Случай 2**. ⚡

Тъй като **Случай 1** и **Случай 2** са изчерпателни, заключаваме, че допускането, че съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f((a_1, b_1)) = f((a_2, b_2))$, е погрешно. Заклучаваме, че f е инекция. Доказахме Лема 2. □

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (12)

f е сюрекция (доказателството на Лема 3), (1)

Лема 3

Функцията на изброяването f , дефинирана в (1), е сюрекция.

Доказателство: Щом f е инекция, f^{-1} е частична функция. Очевидно следният алгоритъм с вход n реализира f^{-1} .

```
if (n == 0) {a = 0; b = 0;}  
else {c = 1;  
      while (c <= n) {n = n - c; c ++;}  
      a = c - 1 - n; b = n;}  
return (a, b);
```

Приемаме за очевидно, че за изхода (a, b) е вярно, че $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е най-голямото триъгълно число, по-малко или равно на входа n .

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (13)

f е сюрекция (доказателството на Лема 3), (2)

Но този алгоритъм работи коректно за всеки вход n . Тогава f^{-1} е тотална функция. Ерго, f е сюрекция. Доказахме Лема 3. $\square$

Лема 2 и Лема 3 доказват Теорема 3.

Множеството от рационалните числа е изброимо (1)

Кои са рационалните числа

Определение

Множеството от рационалните числа е

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Забелязваме, че (изброимо безкрайно) множество обикновени дроби $\frac{p}{q}$ съответстват на едно и също число; примерно $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{-2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1000001}{2000002}$ и така нататък съответстват на, или представляват, едно и също число. И така, рационалните числа нямат уникално представяне чрез обикновени дроби. Може да въведем релация на еквивалентност (каква?) върху множеството от дробите и да кажем, че нейните класове на еквивалентност са рационалните числа.

Множеството от рационалните числа е изброимо (2)

Контраинтуитивно, рационалните числа са изброими

Да кажем, че $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Лесно следствие на Теорема 3 е това:

Следствие 1

Съществува биекция $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$.

Забелязваме, че рационалните числа може да се записват като наредени двойки: дали ще напишем “ $\frac{p}{q}$ ” или “ (p, q) ” не е съществено.

Един начин да бъдат изброени елементите на $\mathbb{Q}^+$ е да вземем таблицата от слайд 22, да изтрием най-лявата колона (за да няма деление на нула) и след това да “вървим” в реда на онова изброяване, като прескачаме наредените двойки, които представляват числа, които вече са били изброени:

$$0, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, 6, \frac{5}{2}, \dots$$

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (1)

Теорема 4

Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 3 беше достатъчно да покажем само един начин за изброяване. Сега обаче не е достатъчно да покажем, че един определен начин за изброяване “не работи”. Сега се иска да покажем, че **никой** начин за изброяване “не работи”. Ще извършим доказателството с допускане на противното. Допускаме, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, тоест, съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (2)

Характеристична редица е безкрайна булева редица $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, която характеризира, или определя, дадено подмножество X на $\mathbb{N}$ по следното правило. За всяко $n \in \mathbb{N}$:

- ако $a_n = 1$, то n се съдържа в X ,
- ако $a_n = 0$, то n не се съдържа в X .

Ето няколко примера за характеристични редици и подмножествата на $\mathbb{N}$, които те определят:

- $(0, 0, 0, \dots)$ */*само нули*/* определя празното множество;
- $(1, 1, 1, \dots)$ */*само единици*/* определя самото $\mathbb{N}$;
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ */*повтаряне на 10*/* определя четните числа;
- $(0, 1, 1, 0, 0, \dots)$ */*само две единици*/* определя $\{1, 2\}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (3)

Нека $\mathcal{A}$ е множеството от характеристичните редици.

Съществува очевидна биекция между $\mathcal{A}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

Твърдението “подмножествата на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени” става “елементите на $\mathcal{A}$ могат да бъдат изброени”. Това е допускането, което ще опровергаем.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (4)

Допускаме изброяване на характеристичните редици: $A_0, A_1, \dots$, като всяка характеристична редица се появява точно веднъж. Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \dots)$, и така нататък. Представяме си ги написани в безкрайна колона:

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots)$$

$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots)$$

$\dots$

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (5)

Разглеждаме главния диагонал: редицата

$$X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots).$$

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots)$$

$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots)$$

...

Образуваме нейната “побитова инверсия”, редицата

$$\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, \overline{a_{3,3}}, \dots).$$

За всяко i, j , $\overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$, и обратно.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (6)

Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и $\overline{X}$ да се среща. Но $\overline{X}$ не може да е A_0 , защото се различават в поне една позиция – нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$; ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.

Аналогично, $\overline{X}$ не може да е A_1 , защото се различават в първата позиция, $\overline{X}$ не може да е A_2 , защото се различават във втората позиция, и така нататък.

Тогава $\overline{X}$ не се среща в колоната; иначе казано, подмножеството B на $\mathbb{N}$, съответстващо на $\overline{X}$, няма образ в хипотетичната биекция $h: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$. ⚡



Множеството от реалните числа е неизброимо (1)

Само числата от $[0, 1]$ са неизброимо много

$[0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Нека $\mathcal{A}$ е множеството от всички характеристични редици, което вече дефинирахме на слайд 34. Съществува очевидна биекция $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$; разглеждаме числата от $[0, 1]$, записани като двоични дроби в двоична позиционна бройна система, без нулата вляво от двоичната точка, без самата точка, с безкрайно дълъг запис, евентуално попълнен с нули вдясно. Примено, числото една втора по принцип се пише като 0.1 в двоична система, но ние ще го запишем като 10000....

Маловажна особеност: някои числа имат по два записа.

- Една втора има два записа по традиционния начин: 0.1 и 0.01111.... По текущия начин на записване те стават съответно 10000... и 01111111....
- Единицата има два записа по традиционния начин: 1.0 и 0.11111.... По текущия начин те стават съответно 0000... и 11111....

Множеството от реалните числа е неизброимо (2)

$[0, 1]$ и $(0, 1]$ са равномощни

$(0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$. Твърдим, че има биекция $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$. Доказателството не може да използва функцията-идентитет $\text{id}(x) = x$, защото $(0, 1]$ не съдържа нулата, така че $\text{id}(0)$ би било извън $(0, 1]$.

Но може да ползваме идеята на хотела на Hilbert: 0 се изобразява в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ се изобразява в $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ се изобразява в $\frac{7}{8}$, и така нататък. Формално, $\forall n \in [0, 1]$:

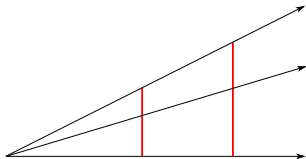
$$f(n) = \begin{cases} \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, & \text{ако съществува } k \in \mathbb{N}, \text{ такова че } n = \frac{2^k-1}{2^k}, \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Аналогично се доказва, че $[0, 1]$ и $(0, 1)$ са равномощни. Вече видяхме, че $[0, 1]$ е неизброимо. Тогава и $(0, 1)$ е неизброимо.

Множеството от реалните числа е неизброимо (3)

$(0, 1)$ и $\mathbb{R}$ са равномощни (1)

Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $b > a$ и $d > c$. Това, че $[a, b]$ и $[c, d]$ са равномощни, е очевидно. Ако мислим за отсечки с различни дължини:



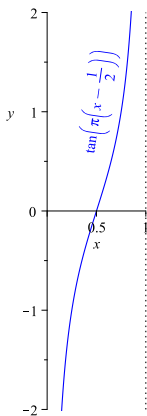
Всеки от интервалите може да е затворен, отворен или полузатворен, равномощността остава в сила.

Ще докажем нещо доста по-контраинтуитивно: кой да е интервал, да кажем $(0, 1)$, е равномощен с $\mathbb{R}$. Отсечка е равномощна с безкрайна права!

Множеството от реалните числа е неизброимо (4)

$(0, 1)$ и $\mathbb{R}$ са равномощни (2)

$\tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ е биекция, изобразяваща $(0, 1)$ в $\mathbb{R}$.



Графиката е генерирана с Maple(tm).

Реалните числа са (безкрайно) повече от рационалните

Видяхме, че $\mathbb{Q}$ е изброимо, а $\mathbb{R}$ е неизброимо. В някакъв смисъл, реалните числа са повече от рационалните: не просто $\mathbb{Q}$ е строго подмножество на $\mathbb{R}$, но реалните числа са по-високо в йерархията на безкрайностите. Това е доста контраинтуитивно, понеже всеки отворен интервал в $\mathbb{R}$ съдържа безкрайно много рационални числа. Ерго, през колкото и силна “лупа” да разглеждаме реалната ос, няма да видим реален интервал, в който няма рационални числа.

КРАЙ