

Лекция 5: Принципи на изброителната комбинаторика

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

5 ноември 2025 г.

Изброителна комбинаторика (Enumerative Combinatorics)

Комбинаториката е дял на дискретната математика, чийто предмет е изброяването на някакви обекти, наречени *комбинаторни структури* или *комбинаторни конфигурации*. Какви са тези комбинаторни структури ще стане ясно нататък.

Изброителната комбинаторика търси точни формули за бройките на тези обекти.

Принципи на изброителна комбинаторика

Ще разгледаме няколко основни закона на комбинаториката.
Те не са аксиоми: всеки от тях може да бъде доказан.

Ще направим подробно доказателство само на принципа на включването и изключването.

Оттук нататък всички множества, които разглеждаме, са крайни, освен ако изрично не е казано, че са безкрайни.

Принцип на Dirichlet (the pigeonhole principle)

Известен още като *принцип на чекмеджетата*. На английски е *the pigeonhole principle*. Неформално: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже съдържа повече от една ябълка. Формално: ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция от X в Y .

Доказва се елементарно: $|X| > |Y|$ е еквивалентно на $\neg(|X| \leq |Y|)$, а $|X| \leq |Y|$ тук има инекция от X в Y .

Обобщен принцип на Dirichlet

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Алтернативна формулировка на обобщения принцип на Dirichlet е: ако има m ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмежде има поне $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ ябълки.

Принцип на разбиването (събирането)

Дадено е множество X и разбиване $\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_k\}$ на X .
Тогава

$$|X| = |Y_1| + \dots + |Y_k| \quad (1)$$

Забележете, че това остава в сила дори някои от множествата $Y_1, \dots, Y_k$ да са празни. Съгласно формалната дефиниция, това не би било разбиване, но (1) остава в сила: мощностите на празните Y_i са нули и те не се отразяват на сумата.

Приемаме този принцип за очевиден и няма да правим доказателство.

Това е тривиално следствие от принципа на разбиването. Нека е дадено множество A в универсум U . Тогава

$$|A| = |U| - |\bar{A}| \quad (2)$$

Очевидно $\{A, \bar{A}\}$ е разбиване на универсума, така че от принципа на разбиването имаме $|U| = |A| + |\bar{A}|$.

Не е невъзможно $\bar{A}$ да е празно, но и тогава (2) остава в сила.

Принцип на умножението

Нека A и B са множества. Тогава

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Приемаме го за очевиден и без доказателство.

Естествено обобщение е следното. Ако $A_1, \dots, A_k$ са множества, то

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_k|$$

Написано по по-икономичен начин:

$$\left| \times_{i=1}^k A_i \right| = \prod_{i=1}^k |A_i|$$

Принцип на биекцията

Нека A и B са множества. $|A| = |B|$ тогава и само тогава, когато съществува биекция $f : A \rightarrow B$.

Това е тривиален извод от дефиницията на мощност на множество.

Този принцип е много полезен, когато, за да изброим някакви обекти, изброяваме други обекти и показваме, че съществува биекция между двете множества от обекти.

Принцип на делението

Нека A е множество. Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Нека A има k класа на еквивалентност и всеки клас на еквивалентност има кардиналност m . Тогава

$$m = \frac{|A|}{k}$$

Принцип на включването и изключването (1)

Въведение

Принципът на включването и изключването се явява обобщение на принципа на разбиването. При разбиването намираме кардиналност на множество като сума от кардиналностите на дяловете на някое негово разбиване. Сега е дадено покриване на множеството и намираме кардиналността на множеството, като събираме и изваждаме кардиналностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, по тройки и така нататък.

Принцип на включването и изключването (2)

Пример (1)

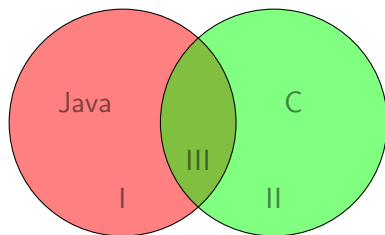
Дадена е група студенти. 10 от тях посещават практикум по Java, 12 посещават практикум по C и е известно, че всеки студент посещава поне един практикум. От колко студента се състои групата?

Нека групата е A . Очевидно $12 \leq |A| \leq 22$, като тези граници са точни.

Ако обаче е известно, че точно 2-ма студенти посещават и Java, и C, веднага следва, че $|A| = 20$. По-подробно, $|A| = 10 + 12 - 2 = 20$.

Принцип на включването и изключването (3)

Пример (2)



Сумата $10 + 12 = 22$ брой прекалено много (overcounting). Тя брой райони I и II правилно, по веднъж, но брой район III неправилно: два пъти.

Сумата $10 + 12 - 2 = 20$ брой всеки район точно веднъж.

Принцип на включването и изключването (4)

По-сложен пример (1)

Дадена е група студенти. 20 посещават практикум по Java, 19 по C и 17 по PHP. 8 посещават Java и C, 7 посещават Java и PHP, 8 посещават C и PHP. 3 посещават и трите практикума. Групата се състои от 46 студенти. Колко студенти не посещават нито един от трите практикума?

Принцип на включването и изключването (5)

По-сложен пример (2)

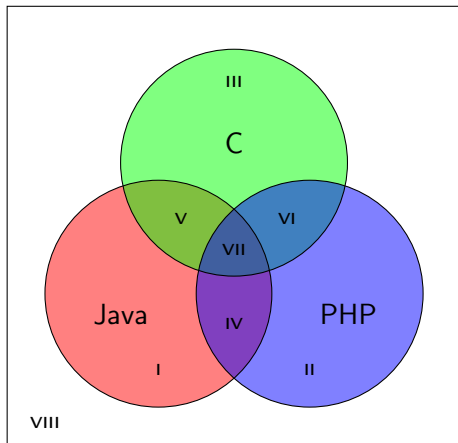
Отговорът е

$$46 - (20 + 19 + 17) + (8 + 7 + 8) - 3 = 46 - 56 + 23 - 3 = 10$$

$(20 + 19 + 17) - (8 + 7 + 8) + 3 = 36$ е броят на студентите в поне един практикум. Да видим защо.

Принцип на включването и изключването (6)

По-сложен пример (3). Диаграма на Venn на практикумите.

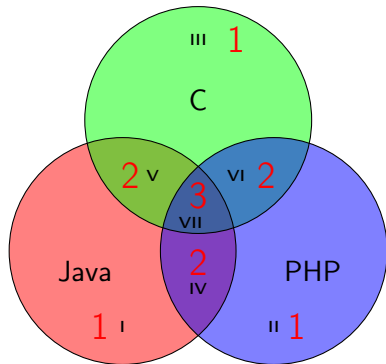


Търсим кардиналността на обединението на Java, C и PHP.

I, ..., VIII са районите. I са тези, които ходят само на Java, V са само на Java и C, и т.н. Ние не знаем кардиналностите на районите, освен на VII. Ако ги знаехме, задачата щеше да е много лесна.

Принцип на включването и изключването (7)

По-сложен пример (4). $20 + 19 + 17 = 56$ е прекалено много.

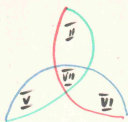


Сумата $20 + 19 + 17$ брои I, II и III по един път, но IV, V и VI биват броени по два пъти, а тримата студенти от VII биват броени три пъти от тази сума.

Заради това 56 е повече от кардиналността на обединението.

Принцип на включването и изключването (8)

По-сложен пример (5)



$8+7+8$ броя II, V и VI
веднъж и VII три пъти.

Това е $(20+19+17) - (8+7+8)$

брой I, III, IV, II, V и VI по

веднъж (правилно!),

но брой VII нула пъти.

$(20+19+17) - (8+7+8) + 3$ броя
Всеки от районите I..VII веднъж

Това са 36 студенти ходят
на поне един факт., така че

$46 - 36 = 10$ не ходят на
нищо един.

Принцип на включването и изключването (9)

Обща формулировка

Теорема 1

За всяко $n \geq 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (3)$$

Доказателството е със **силна индукция** по n . Базата е $n = 1$.
(3) става $|A_1| = |A_1|$. ✓ Индукционното предположение е, че за всяко $k \in \{1, \dots, n-1\}$, за **всеки** k множества $B_1, \dots, B_k$:

$$|B_1 \cup \dots \cup B_k| = \sum_{1 \leq i \leq k} |B_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |B_i \cap B_j| - \dots + (-1)^{k-1} |B_1 \cap \dots \cap B_k| \quad (4)$$

В частност, при $k = n-1$ и мн-ва $A_1, \dots, A_{n-1}$, предп. става:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \quad (5)$$

Принцип на включването и изключването (10)

Индукционната стъпка от доказателството

Индукционната стъпка е за стойност на аргумента n . В сила е

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| &= | \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_X \cup \underbrace{A_n}_Y | = \\ &= | \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}}_X | + | \underbrace{A_n}_Y | - | \underbrace{(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})}_X \cap \underbrace{A_n}_Y | \quad (6) \end{aligned}$$

тъй като $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (от (4) при $k = 2$).

Знаем колко е $|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}|$ от (5). Да разгледаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$.

Принцип на включването и изключването (11)

Разглеждаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$ (1)

В сила е

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n) \quad (7)$$

заради дистрибутивността на сечението спрямо обединението.

Дясната страна на (7) е обединение на $n - 1$ множества и (4) е приложимо с $k = n - 1$ и $B_1 = A_1 \cap A_n, \dots, B_{n-1} = A_{n-1} \cap A_n$.
Съгласно (4):

$$\begin{aligned} |(A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| = & + \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)| \\ & \dots \\ & + (-1)^{n-2} |(A_1 \cap A_n) \cap \dots \cap (A_{n-1} \cap A_n)| \quad (8) \end{aligned}$$

Принцип на включването и изключването (12)

Разглеждаме $|(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$ (2)

Опростявайки дясната страна на (8) и предвид (7), получаваме

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = & + \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| \\ & \dots \\ & + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \end{aligned} \quad (9)$$

Принцип на включването и изключването (13)

В дясната страна на (6) заместваме съгласно (5) и (9) и получаваме

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| = \\ & \left(\sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \right) \\ & + |A_n| \\ & - \left(\sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| - \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \right) = \\ & \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \\ & - \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \quad (10) \end{aligned}$$

Принцип на включването и изключването (14)

В дясната страна на (10) групираме събираемите от горния и долния ред по подходящ начин:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1 \\ 1 \leq k \leq n-1}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \\ - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} |A_i \cap A_n| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}} |A_i \cap A_j \cap A_n| - \dots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n-1 \\ 1 \leq \dots \leq n-1 \\ i_{n-2} \leq n-1}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| = \end{aligned}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |A_i \cap A_j| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-2} \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n \\ 1 \leq \dots \leq n \\ i_{n-1} \leq n}} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Получихме дясната страна на (3). □

Принцип на включването и изключването (15)

Символно, групирания и опростявания в дясната страна на (10) са следните

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| \text{ не се групира с нищо;} \\ & - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i \leq n-1} |A_i \cap A_n| = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|; \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k|; \\ & \dots \end{aligned}$$

$$(-1)^{n-2} |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| \text{ се групира с } (-1)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-2} \leq n-1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n|;$$

$$(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n| \text{ не се групира с нищо.}$$

Принцип на включването и изключването (16)

Това е лесно следствие от Теорема 1.

Следствие 1

За всяко $n \geq 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \dots, A_n$, намиращи се в произволен универсум U :

$$|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n| \quad (11)$$

Доказателство: Имаме

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = |U| - |A_1 \cup \dots \cup A_n| \quad (12)$$

от принципа на изваждането.

Лявата страна на (12) е $|\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$ по обобщения закон на De Morgan, а в дясната му страна замества $|A_1 \cup \dots \cup A_n|$ с израза от (3). Получаваме (11).

КРАЙ