

Лекция 6: Комбинаторни структури

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

11 септември 2025 г.

Дадено е *опорно множество* $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$, от чиито елементи ще изграждаме комбинаторните структури. На английски терминът е *ground set*.

Структурите може да се изграждат с наредба или без наредба, а също така и с повтаряне или без повтаряне. Това дава общо четири възможности. “Наредба” означава линейна наредба.

С “ m ” означаваме *големината* на дадена структура. Тоест, броят на елементите в нея.

Структури с наредба и повтаряне

Множеството от структурите с наредба и повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с " $K_{H,P}(n, m)$ ". Елементите му са наредените m -торки (векторите с големина m), чиито елементи са от опорното множество A . Лесно се вижда, че $K_{H,P}(n, m) = A^m$.

Интересува ни $|K_{H,P}(n, m)|$. С обобщения принцип на умножението извеждаме

$$|K_{H,P}(n, m)| = |A^m| = |A|^m = n^m \quad (1)$$

Структури с наредба и повтаряне (2)

Пример

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 2$. Тогава $K_{H,\Pi}(3, 2) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.
Наистина, $|K_{H,\Pi}(3, 2)| = 3^2 = 9$.

Структури с наредба, без повтаряне

Множеството от структурите с наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с " $K_H(n, m)$ ". Елементите му са наредените m -торки (векторите с големина m) без повтаряне, чиито елементи са от опорното множество A .

Интересува ни $|K_H(n, m)|$. Представяме си процеса на изграждането на някой от тези вектори. За първата позиция можем да изберем всеки елемент на A , следователно имаме n възможности. За втората позиция имаме само $n - 1$ възможности, защото елементът от A , избран за първата позиция, вече не може да се ползва. Аналогично, за третата позиция има само $n - 2$ възможности, и така нататък, за m -тата позиция имаме само $n - (m - 1)$ възможности.

Структури с наредба, без повтаряне (2)

Виждаме, че

$$|K_H(n, m)| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - m + 1) \quad (2)$$

Ако предпочитате, може да запишете това така:

$$|K_H(n, m)| = (n - 0) \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (m - 1))$$

Дясната страна на (2) може да се напише и като $\prod_{k=0}^{m-1} (n - k)$, а освен това и като $n^{\overline{m}}$. Последното се чете “ n на падаща степен m ”.

(2) не се получава от принципа на умножението.

(2) остава в сила и при $m > n$. Забележете, че, ако $m > n$, то дясната страна е нула, понеже има множител нула, а лявата страна е нула по очевидни причини.

Структури с наредба, без повтаряне (3)

Пример

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 2$. Тогава

$$K_H(3, 2) = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}.$$

Това не е изведено чрез принципа на умножението. Имаме $|K_H(3, 2)| = 3 \cdot 2 = 3^2 = 6$, но $K_H(3, 2)$ не е декартово произведение нито на триелементно и двуелементно множество, нито на шестелементно и едноелементно множество. Както на първа, така и на втора позиция се срещат и трите елемента на A .

Структури с наредба, без повтаряне (4)

Друг пример

Нека $A = \{a, b, c\}$. Нека $m = 4$. Но $K_H(3, 4) = \emptyset$, тъй като е невъзможно да не потворим елемент от A съгласно принципа на Dirichlet.

Забележете, че дясната страна на (2) става именно нула:

$$3^4 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Ерго, когато разсъждаваме за $K_H(n, m)$, не е необходимо да изискваме $m \leq n$.

Структури с наредба, без повтаряне (5)

Пермутации

Важен частен случай е $n = m$. Тогава векторите се наричат *пермутации*. Пермутациите на n на брой, два по два различни обекта (pairwise distinct), са разполаганията в линейна наредба на тези обекти.

Дясната страна на (2) става $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Това бележим с “ $n!$ ”. Чете се “ен-факториел”, на английски е *factorial*. И така,

$$|K_H(n, n)| = n!$$

Примерно, по колко начина могат да се наредят 12 човека в редица? Отговорът е $12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$.

Структури с наредба, без повтаряне (6)

Колко е $0!$!

В сила е $0! = 1$. Комбинаторно, това може да се изведе така:
по колко начина можем да разположим нула обекта в редица?
Отговор: по един начин, а именно празния начин.

Алгебрично, същото можем да изведем така:

$$\prod_{k \in \emptyset} k = 1$$

Вземаме неутралния елемент на умножението, който е единицата, а не нулата.

Странична забележка: нулата е неутралният елемент на събирането, поради което $\sum_{k \in \emptyset} k = 0$.

Структури без наредба и без повтаряне (1)

Множеството от структурите без наредба, без повтаряне с големина m над опорно множество с кардиналност n означаваме с " $K(n, m)$ ". Елементите му са m -елементните подмножества на опорното множество A .

Наричат се още *комбинации*. Този термин обаче се използва широко за какво ли не. Точният термин е "подмножество".

Структури без наредба и без повтаряне (2)

Интересува ни $|K(n, m)|$. Пресмята се от $|K_H(n, m)|$ чрез принципа на делението. Въвеждаме релация $R \subseteq K_H(n, m) \times K_H(n, m)$ така:

$\forall X, Y \in K_H(n, m) : X R Y \leftrightarrow X$ и Y имат едни и същи елементи

R е релация на еквивалентност. Всеки неин клас на еквивалентност има кардиналност $m!$, а $|K(n, m)|$ е броят на класовете на еквивалентност, като

$$|K(n, m)| = \frac{|K_H(n, m)|}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} \quad (3)$$

Структури без наредба и без повтаряне (3)

Пример с фиш от тото 6/49. Колко са възможните фишове?
Отговорът $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10\,068\,347\,520$ е грешен.

Верният отговор е

$$\frac{10\,068\,347\,520}{6!} = \frac{10\,068\,347\,520}{720} = 13\,983\,816$$

Причината да делим на $6! = 720$ е, че няма значение в какъв ред се изтеглят числата. Ако и редът на изтегляне имаше значение, фишовете наистина щяха да са $10\,068\,347\,520$. Но това би била друга игра.

Структури без наредба и без повтаряне (4)

Биномен коефициент

Понякога (3) се записва така:

$$|K(n, m)| = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (4)$$

Въпреки че (4) е по-кратък и “по-спретнат” запис, като алгоритъм (3) е по-бърз.

Дясната страна на (3) и (4) се нарича *биномен коефициент*, на английски *binomial coefficient*, и се бележи кратко с “ $\binom{n}{m}$ ”. Чете се “ен-над-ем”, на английски “n-choose-m”. И така,

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

n е *горен индекс*, а m е *долен индекс*. Да не се бърка $\binom{n}{m}$ с $(\frac{n}{m})!$

Структури без наредба и без повтаряне (5)

Свойства на биномния коефициент (1)

Дефинираме $\binom{n}{m}$ за $m, n \in \mathbb{N}$. Ако $m > n$, то $\binom{n}{m} = 0$, което има комбинаторен смисъл: има нула начина да изберем m елементно подмножество на A , ако $|A| = n$ и $m > n$.

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Също има комбинаторен смисъл: има точно един начин да изберем нула неща от n неща (не избираме нищо, тоест избираме празното множество) и има точно един начин да изберем n неща от n неща (избираме всичко).

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Има n начина да изберем едно нещо от n неща. Има n начина да изберем $n - 1$ неща от n неща.

Изобщо, при $m \leq n$, в сила е $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$. Това също има комбинаторен смисъл: като брой начини да го сторим, все едно е дали избираме m неща от n неща или $n - m$ неща от n неща. Примерно, тото 6/49 можеше да е 43/49.

Структури без наредба и без повтаряне (6)

Свойства на биномния коефициент (2)

При фиксиран горен индекс n , сумата от всички биномни коефициенти е 2^n :

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_1 + \underbrace{\binom{n}{1}}_n + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_n + \underbrace{\binom{n}{n}}_1 = 2^n \quad (5)$$

И това има комбинаторен смисъл. Дясната страна брои всички подмножества на n -елементно множество, а знаем, че те са 2^n ; това се извежда тривиално с броене на характеристичните вектори с дължина n , които са $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$. Лявата страна брои разбиването на всички подмножества по кардиналности.

Това е пример за *доказателство с комбинаторни съображения*, или *принцип на двукратното броене*.

Структури без наредба и без повтаряне (7)

Свойства на биномния коефициент (3)

Ако $n, m \geq 1$, в сила е

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (6)$$

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна брой m -елементните подмножества на n -елементно множество A . Дясната страна брой същото, но по-детайлно. Фиксираме произволен $a \in A$.

- m -елементните подмножества, които **не съдържат** a , са $\binom{n-1}{m}$, защото $|A \setminus \{a\}| = n - 1$, а $A \setminus \{a\}$ е множеството, от което можем да избираме.
- m -елементните подмножества, които **съдържат** a , са $\binom{n-1}{m-1}$, защото след като изберем a , останалите $m - 1$ на брой пак избираме от $A \setminus \{a\}$.

По принципа на разбиването $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$.

Структури без наредба и без повтаряне (8)

Свойства на биномния коефициент (4): триъгълникът на Pascal

Клетката на ред n и колона k съдържа $\binom{n}{k}$. Всеки “вътрешен” елемент е сумата от елемента над него и елемента горе вляво; тоест, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Структури без наредба и без повтаряне (9)

Нютонов бином (1)

Теорема 1 (Newton)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

“Бином” означава буквално “двуименник”. На български е прието “двучлен”. Имената са x и y .

Доказателство: с комбинаторни съображения. Лявата страна записваме като

$$\underbrace{(x + y) \cdot (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y) \cdot (x + y)}_{n \text{ множителя}}$$

Очевидно след отварянето на скобите ще се получи сума от 2^n събираеми от вида $x^k y^{n-k}$, по всички $k \in \{0, \dots, n\}$.

Структури без наредба и без повтаряне (10)

Нютонов бином (2)

Разбиваме множеството от събираемите в $n + 1$ множества по степента на x (която диктува степента на y): $x^0 y^n, x^1 y^{n-1}, \dots, x^n y^0$. Коефициентът пред $x^k y^{n-k}$ е броят на появите на това събираемо. За да определим този брой, съобразяваме, че x^k “идва” от k на брой множителя (останалите множители дават y^{n-k}). А тези k множителя можем да изберем от всички n множителя по $\binom{n}{k}$ начина.

Примерно, $x^n y^0$ се появява само веднъж, понеже за него трябва да “дойде” x от всеки множител. $x^{n-1} y^1$ се появява точно n пъти, защото от един множител “идва” y , от останалите, x , а този един множител можем да изберем по n начина. И така нататък. □

Структури без наредба и без повтаряне (11)

Нютонов бином (3)

С Теоремата на Newton лесно извеждаме (5): полагаме $x = y = 1$.

Лесно доказваме и

$$3^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

Записваме лявата страна като $(2 + 1)^n$, дясната страна като $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k}$ и прилагаме Теорема 1.

Структури без наредба и без повтаряне (12)

Свойства на биномния коефициент (5): бин. коеф. брой и наредени структури

По колко начина можем да сложим p единици и q нули в редица?

Общо $p + q$ булеви цифри. Това са характеристичните вектори с дължина $p + q$ и точно p единици. Те съответстват биективно на p -елементните подмножества на $(p + q)$ -елементно множество. Ние вече знаем колко са тези подмножества: $\binom{p+q}{p}$.
Тогава и въпросните характеристични вектори са толкова.

Можем да го запишем и като $\binom{p+q}{q}$.

Структури без наредба и без повтаряне (13)

Свойства на биномния коефициент (6)

Да се докаже тъждеството $\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{k}$. Можем да го докажем алгебрично с (6) така:

$$\begin{aligned}\binom{n+m}{m} &= \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-1}{m-1} \\ \binom{n+m-1}{m-1} &= \binom{n+(m-1)-1}{m-1} + \binom{n+(m-1)-1}{(m-1)-1} \\ \binom{n+m-2}{m-2} &= \binom{n+(m-2)-1}{m-2} + \binom{n+(m-2)-1}{(m-2)-1} \\ &\dots \\ \binom{n+m-(m-1)}{m-(m-1)} &= \binom{n+m-(m-1)-1}{m-(m-1)} + \binom{n+m-(m-1)-1}{m-(m-1)-1} \\ \binom{n+m-m}{m-m} &= \binom{n+m-m-1}{m-m} + \binom{n-1}{-1} \\ \hline \binom{n+m}{m} &= \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1} + \dots + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{0}\end{aligned}$$

Структури без наредба и без повтаряне (14)

Свойства на биномния коефициент (7)

Интерпретация в триъгълника на Pascal на

$$\binom{n+m}{m} = \binom{n+m-1}{m} + \binom{n+m-2}{m-1} + \dots + \binom{n-1}{0}$$

Примерно,

$$\binom{6+6}{6} = \binom{11}{6} + \binom{10}{5} + \binom{9}{4} + \binom{8}{3} + \binom{7}{2} + \binom{6}{1} + \binom{5}{0}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

Структури без наредба и без повтаряне (15)

Свойства на биномния коефициент (8)

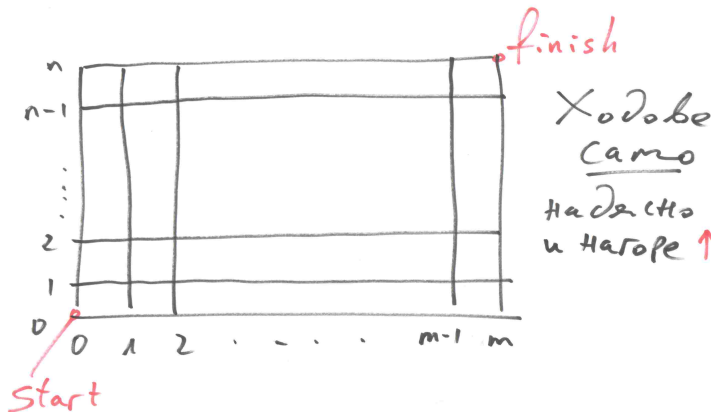
Има интересно доказателство с комбинаторни съображения на

$$\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{n+k-1}{k}$$

Структури без наредба и без повтаряне (16)

Свойства на биномния коефициент (9)

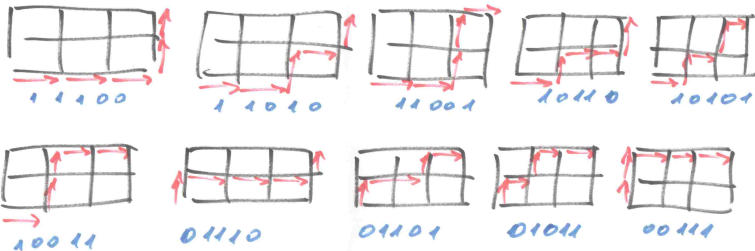
Разходки в мрежа
(lattice walks)



Структури без наредба и без повтаряне (17)

Свойства на биномния коефициент (10)

$\rightarrow = 1$ $\uparrow = 0$

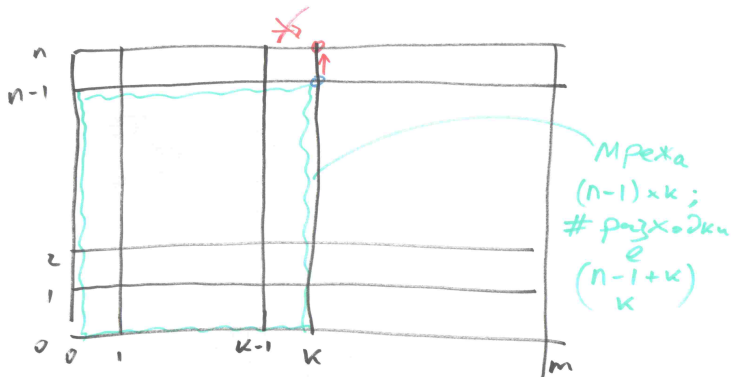


При $m=3$, $n=2$, # на разходките
е $10 = \binom{2+3}{2} = \binom{2+3}{3}$. Това не е
случайно!

В $n \times m$ мрежа, # на разх. е $\binom{n+m}{m}$

Структури без наредба и без повтаряне (18)

Свойства на биномния коефициент (11)



$$0 \leq k \leq m$$

Разбиваме разходките по k :
Вертикалът, на който за пръв път
"излизаме" най-горе; $\binom{n+m}{m} = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{n-1+k}{k}$

Структури без наредба, с повтаряне (1)

Комб конф с повт, без нр.

$$K_n(p, m)$$

Елементите са
мултип.в-ти/с големина m
над n -ел. опорно м.в.

$$|K_n(p, m)| = ?$$

Структури без наредба, с повтаряне (2)

Нека $A = \{a, b\}$, нека $m = 5$.

$$K_p(2, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{a, a, a, a, b\}_m, \\ \{a, a, a, b, b\}_m, \\ \{a, a, b, b, b\}_m, \\ \{a, b, b, b, b\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m \end{array} \right\}$$

Структури без наредба, с повтаряне (3)

Нека $A = \{a, b\}$, нека $m = 5$.

$$K_n(2, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{a, a, a, a, b\}_m, \\ \{a, a, a, b, b\}_m, \\ \{a, a, b, b, b\}_m, \\ \{a, b, b, b, b\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m \end{array} \right\}$$

Структури без наредба, с повтаряне (4)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_n(3,5)| = ?$$

$$K_n(3,5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m, \\ \{a, a, a, a, c\}_m, \\ \dots \\ \{a, b, b, c, c\}_m, \\ \vdots \\ \{c, c, c, c, c\}_m \end{array} \right\} K_n(2,5)$$

Структури без наредба, с повтаряне (5)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_n(3, 5)| = ?$$

$$K_n(3, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m, \\ \{a, a, a, a, c\}_m, \\ \dots \\ \{a, b, b, c, c\}_m, \\ \vdots \\ \{c, c, c, c, c\}_m \end{array} \right\} K_n(2, 5)$$

Структури без наредба, с повтаряне (6)

$$A = \{a, b, c\}. \quad |K_n(3, 5)| = ?$$

$$K_n(3, 5) = \left\{ \begin{array}{l} \{a, a, a, a, a\}_m, \\ \{b, b, b, b, b\}_m, \\ \{a, a, a, a, c\}_m, \\ \dots \end{array} \right\} K_n(2, 5)$$

$$* \left(\begin{array}{c} * * \\ * * \end{array} \right) * * = \{a, b, b, c, c\}_m,$$

m '*'

$n-1$ '||'

⋮

$$\left\{ \begin{array}{c} || \\ c, c, c, c, c \end{array} \right\}_m \}$$

$$K_n(n, m) = \binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

Структури без наредба, с повтаряне (7)

Пример с билети

12 еднакви билета се раздават на 10 човека. По колко начина може да стане това?

Решение: множеството от хората е опорното множество. Броят на билетите е големината на структурата. Тогава $n = 10$, $m = 12$. Отговорът е

$$\binom{12 + 10 - 1}{12} = \binom{12 + 10 - 1}{10 - 1} = 293\,930$$

Едно от раздаванията:

** ||| ||*** ||* ||***** ||*

Първи човек с два билета; втори, трети и четвърти с по нула билети, петия човек с три билета, шестият без билети, седмият с един билет, осмият с пет билета, деветият с един билет и десетият без билети.

Структури без наредба, с повтаряне (8)

Пример с тото

Колко са фишовете в 6 от 49, ако след изтегляне на топка тя веднага се връща в сферата?

Отговор:

$$\binom{49 + 6 - 1}{6} = 25\,827\,165$$

Какво е добър отговор на комбинаторна задача (1)

Дадена е група A от n студента. Дадени са $k, \ell \in \mathbb{N}$, такива че $k + \ell \leq n$. По колко начина можем да изберем подгрупа B от k студента и подгрупа C от ℓ студента, така че факултетните номера на хората от B да са по-малки от фак. номера на хората от C ?

Първо решение. По принципа на разбиването:

$$\sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \cdot \binom{n-j}{\ell}$$

Второ решение. Достатъчно е да изберем $k + \ell$.

$$\binom{n}{k + \ell}$$

Какво е добър отговор на комбинаторна задача (2)

Второто решение е по-добро, защото е по-бърз алгоритъм. Върху Maple 2018 (tm), за $n = 10\,000$, $k = \ell = 500$, имплементацията на второто решение отнема около 0.031 секунди, а на първото, около 20.859 секунди.

Всяка смислена формула задава алгоритъм. Добро е решение е формула, която задава бърз алгоритъм. А не формула, която е кратка и “спретната”. За първото решение ние може да си дефинираме нотация

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k; \ell \end{matrix} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \cdot \binom{n-j}{\ell}$$

но това си остава бавен алгоритъм.

КРАЙ