

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ДОМАШНО №1

Задача 1: Безкрайната редица $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ е дефинирана със следната рекурсивна формула:

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{ако } n = 1 \\ 4, & \text{ако } n = 2 \\ 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, & \text{ако } n \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

Докажете по индукция, че

$$\forall n \geq 4 : a_n > \left(\frac{5}{2}\right)^n \quad (2)$$

Решение: Първо ще изчислим още няколко стойности на a_n :

$$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$$

$$a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2 \cdot 14 + 3 \cdot 4 = 40$$

$$a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2 \cdot 40 + 3 \cdot 14 = 122$$

Базата на доказателството е за стойности на аргумента 4 и 5.

Забележете, че **не е достатъчно** да докажем само за $n = 4$. Ако вземем за база само $n = 4$, тази база ще бъде “прескочена” в следващата част на доказателството, понеже дясната страна на (1) съдържа и a_{n-1} , и a_{n-2} . Ако предикатът от (2) е $P(n)$, налага се да доказваме $P(n)$ чрез $P(n-1)$ и $P(n-2)$, което е частен случай на силна индукция. И така, $P(6)$ се доказва чрез $P(5)$ и $P(4)$, в което няма проблеми, но $P(5)$, ако не е част от базата, се доказва чрез $P(4)$ и $P(3)$, което е проблематично. Забележе, че $P(3)$ дори не е истина, понеже $14 \not> \frac{125}{8}$. Ерго, най-малката стойност на аргумента, от която можем да се “обръщаме назад”, е 6. И се налага да имаме $P(5)$ и $P(4)$ като базови случаи.

За $n = 4$, (2) става

$$a_4 > \left(\frac{5}{2}\right)^4 \Leftrightarrow 40 > \frac{625}{16} \Leftrightarrow 640 > 625$$

което очевидно е истина. За $n = 5$, (2) става

$$a_5 > \left(\frac{5}{2}\right)^5 \Leftrightarrow 122 > \frac{3125}{32} \Leftrightarrow 3904 > 3125$$

което очевидно е истина. Доказахме базата. ✓

Индуктивното предположение е, че за някое произволно $n \geq 6$:

$$a_{n-2} > \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_{n-1} > \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$$

Ще докажем, че

$$a_n > \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

Наистина,

$$\begin{aligned}a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad // \text{ по условие, щом } n \geq 3 \\&> 2 \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + 3 \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \quad // \text{ от индуктивното предположение} \\&= \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \left(2 \cdot \frac{5}{2} + 3\right) \\&= \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{10}{2} + \frac{6}{2}\right) \\&= \frac{16}{2} \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \\&= \frac{32}{2^2} \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \\&= \frac{32 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} \left(\frac{5}{2}\right)^{n-2} \\&= \frac{32}{25} \left(\frac{5}{2}\right)^n \\&> \left(\frac{5}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Коего и трябваше да докажем.

□

Задача 2: Разгледайте функцията $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, дефинирана така:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : f(a, b) = 2^{a+1}b + 2^a - 1$$

Докажете, че f е биекция.

Решение: Първо ще докажем, че f е инекция. Ще разгледаме две произволни наредени двойки от естествени числа (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и ще докажем, че $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$. Да допуснем, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$.

Случай I Да допуснем, че $a_1 \neq a_2$. БОО, нека $a_1 > a_2$. Наистина,

$$\begin{aligned} f(a_1, b_1) &= f(a_2, b_2) \leftrightarrow \\ 2^{a_1+1}b_1 + 2^{a_1} - 1 &= 2^{a_2+1}b_2 + 2^{a_2} - 1 \leftrightarrow \\ 2^{a_1+1}b_1 + 2^{a_1} &= 2^{a_2+1}b_2 + 2^{a_2} \leftrightarrow \\ 2^{a_1}(2b_1 + 1) &= 2^{a_2}(2b_2 + 1) \leftrightarrow // \text{лявата и дясната страна са положителни} \\ \log_2(2^{a_1}(2b_1 + 1)) &= \log_2(2^{a_2}(2b_2 + 1)) \leftrightarrow \\ \log_2(2^{a_1}) + \log_2(2b_1 + 1) &= \log_2(2^{a_2}) + \log_2(2b_2 + 1) \leftrightarrow \\ a_1 + \log_2(2b_1 + 1) &= a_2 + \log_2(2b_2 + 1) \leftrightarrow \\ a_1 - a_2 &= \log_2(2b_2 + 1) - \log_2(2b_1 + 1) \leftrightarrow \\ a_1 - a_2 &= \log_2\left(\frac{2b_2 + 1}{2b_1 + 1}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Лявата страна на (3) е цяло положително число. Да допуснем, че дясната страна на (3) е цяло положително число. Тогава дробта в логаритъма е точна степен на двойката с цял положителен степенен показател. А именно,

$$\frac{2b_2 + 1}{2b_1 + 1} = 2^k, \text{ за някое } k \in \mathbb{N}^+$$

Но тогава, за някое цяло положително k :

$$2b_2 + 1 = 2^k(2b_1 + 1) \quad (4)$$

Това обаче е невъзможно, защото лявата страна на (4) е нечетно число, а дясната е четно число. Заклучаваме, че равенство (3) е лъжа, откъдето следва, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$ и $a_1 \neq a_2$, е лъжа.

Случай II Да допуснем, че $a_1 = a_2$. Нека $a = a_1 = a_2$. Веднага следва, че $b_1 \neq b_2$, инак наредените двойки биха били равни. По допускане имаме

$$\begin{aligned} f(a_1, b_1) &= f(a_2, b_2) \leftrightarrow \\ f(a, b_1) &= f(a, b_2) \leftrightarrow \\ 2^a(2b_1 + 1) - 1 &= 2^a(2b_2 + 1) - 1 \\ 2^a(2b_1 + 1) &= 2^a(2b_2 + 1) \\ 2b_1 + 1 &= 2b_2 + 1 \\ 2b_1 &= 2b_2 \\ b_1 &= b_2 \end{aligned}$$

Но това е невъзможно, така че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$ и $a_1 = a_2$, е лъжа. Доказахме, че f е инекция.

Сега ще докажем, че f е сюрекция. Това е същото като да докажем, че всяко естествено число се явява образ на поне една наредена двойка по отношение на f . Веднага забелязваме, че наредените двойки от вида $(0, b)$ имат образи

$$f(0, b) = 2^{0+1}b + 2^0 - 1 = 2b + 1 - 1 = 2b$$

С други думи, техните образи са точно четните числа, като всяко четно число $2b$, където $b \in \mathbb{N}$, се явява образа на наредената двойка $(0, b)$.

За да довършим доказателството, трябва да докажем, че всяко нечетно число се явява образа на някоя наредена двойка (a, b) , където $a \in \mathbb{N}^+$ и $b \in \mathbb{N}$. Да направим малко числени експерименти за $f(a, b)$, резултатите от които ще запишем в Таблица 1. Приемаме, че таблицата е безкрайна надясно и надолу, а ние сме запълнили само показания отрязък.

$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
0	1	3	7	15	31
1	5	11	23	47	95
2	9	19	39	79	159
3	13	27	55	111	223
4	17	35	71	143	287
5	21	43	87	175	351

Таблица 1: $f(a, b)$ за $a \in \{1, 2, \dots, 5\}$ и $b \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

Лема 1 За всяко $b \in \mathbb{N}$, ред b на Таблица 1 започва с $4b + 1$.

Доказателство: Твърди се, че редовете започват с нечетните числа 1, 5, 9, 13 и така нататък. Тоест, започвайки от 1, през едно. Това се доказва елементарно. В колона 1 са образите на наредените двойки $(1, b)$, където $b \in \mathbb{N}$. Наистина, $2^{1+1}b + 2^1 - 1 = 4b + 1$, така че става дума за нечетните числа 1, 5, 9, 13 и така нататък. $\square$

Лема 2 За всяко $b \in \mathbb{N}$, в ред b на Таблица 1, всяко следващо число отляво надясно се получава от предишното с умножение по 2 и добавяне на единица.

Доказателство: И това се доказва елементарно:

$$f(a + 1, b) = 2^{a+2}b + 2^{a+1} - 1 = 2^{a+2}b + 2^{a+1} - 2 + 1 = 2(2^{a+1}b + 2^a - 1) + 1 = 2f(a, b) + 1 \quad \square$$

Това, което не е очевидно, е, че всяко нечетно число се появява навън в тази—безкрайна надясно и надолу—таблица. Тук не се притесняваме за това, дали някое нечетно може да се появи повече от веднъж. Ние вече доказахме, че f е инекция, така че това е невъзможно.

Да препишем в Таблица 2 числата от Таблица 1, добавяйки и запис в двоична позиционна бройна система с удебелени червени цифри.

$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5
0	1 1	3 11	7 111	15 1111	31 11111
1	5 101	11 1011	23 10111	47 101111	95 1011111
2	9 1001	19 10011	39 100111	79 1001111	159 10011111
3	13 1101	27 11011	55 110111	111 1101111	223 11011111
4	17 10001	35 100011	71 1000111	143 10001111	287 100011111
5	21 10101	43 101011	87 1010111	175 10101111	351 101011111

Таблица 2: Числата от Таблица 1 с добавен запис в двоична бройна система.

Шаблоните са очевидни. За всяко b , за ред b са в сила следните твърдения.

- Първият елемент съдържа стринг, завършващ на **1**. Ако $b > 0$, стрингът завършва на **01**.
Както знаем от Лема 1, първият елемент на ред b е $4b+1$. Това е нечетно число, така че двоичният му запис наистина завършва на **1**.
А ако $b > 0$, то $4b$ завършва на **00**, поради което $4b+1$ завършва на **01**. Числото b е двоичният запис на стринга, който се получава след изтриването на суфикса **01**.
- Всеки следващ елемент се получава от предишния с конкатенация на **1** вдясно. Наистина, в двоична бройна система, конкатенация на единица вдясно има смисъл на умножение по две, последвано от добавяне на единица, а съгласно Лема 2, числата във всеки ред се получават отляво надясно точно по този начин.

Сега лесно можем да докажем, че всяко нечетно число се появява някъде в таблицата.

- Числата от най-горния ред на таблицата (тоест, $b = 0$) са точно числата от вида точна степен на двойката минус 1. Наистина, $f(a, 0) = 2^{a+1}0 + 2^a - 1 = 2^a - 1$, за $a \geq 1$. Това са точно числата, чиито записи в двоична бройна система не съдържат нули.
- Да разгледаме произволно нечетно число n , което **не е** от вида точна степен на двойката минус 1. Нека s е записът на n в двоична бройна система. Очевидно s съдържа поне една цифра **0**. Следователно, s е конкатенация на два непразни стринга s_1 и s_2 , тоест, $s = s_1 s_2$, където s_1 започва с **1** и завършва с **0**, а s_2 се състои само от **1** (s_1 е максималният префикс, завършващ с **0**).

Нека s'_1 е непразният стринг, който се получава от s_1 с премахване на последната цифра (последната цифра е **0**). Нека n_1 е числото, чийто двоичен запис е s'_1 . Тогава n се явява образа, по отношение на f , на наредената двойка $(|s_2|, n_1)$.

Като пример да вземем 55. Двоичният му запис е **110111**. При това положение, $s_1 = \mathbf{110}$ и $s_2 = \mathbf{111}$, а $s'_1 = \mathbf{11}$. Тогава $n_1 = 3$, а $|s_2| = 3$. Ерго, $55 = f(3, 3)$.

Задача 3: Нека A е множество и $R \subseteq A \times A$ е релация над него. Нека R^n , за всяко $n \in \mathbb{N}^+$, се дефинира така:

$$R^n = \begin{cases} R, & \text{ако } n = 1 \\ R \circ R^{n-1}, & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

А) Нека $S_0, S_1, S_2, \dots$ са релации над A , тоест, $\forall i \in \mathbb{N} : S_i \subseteq A \times A$. Докажете, че ако за всяко естествено i релацията S_i е симетрична, то $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ също е симетрична. С други думи, обединението запазва симетричността.

Б) Докажете, че транзитивното затваряне на R е равно на $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$.

В) Докажете, че транзитивното затваряне на симетричното затваряне на рефлексивното затваряне на R е минималната по включване релация на еквивалентност, съдържаща R .

Г) Ще се промени ли нещо, ако във **В)** разменим реда, в който прилагаме затварянията?

Решение:

А) Първо да уточним, че $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \subseteq A \times A$. Нека за някои $a, b \in A$, такива че $a \neq b : (a, b) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Тогава $\exists i : (a, b) \in S_i$. Но S_i е симетрична, така че $(b, a) \in S_i$. Следователно, $(b, a) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Симетричността на $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ следва по дефиниция. ✓

Б) Нека означим $R' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n$. Първо ще докажем, че R' е надмножество на R . По дефиниция $R^1 = R$. Но $R^1 \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n = R'$. Тогава $R' \supseteq R$. ✓

Сега ще докажем, че R' е транзитивна. Нека $(x, y) \in R' \wedge (y, z) \in R'$ са произволни. Щом $(x, y) \in R'$, то $\exists k \in \mathbb{N}^+ : (x, y) \in R^k$. Аналогично, $(y, z) \in R'$ влече $\exists m \in \mathbb{N}^+ : (y, z) \in R^m$. Тогава получаваме, по дефиницията на композиция, че $(x, z) \in R^m \circ R^k$. От асоциативността на композицията пък следва, че

$$R^m \circ R^k = (\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_m) \circ (\underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_k) = \underbrace{R \circ R \circ \dots \circ R}_{k+m} = R^{k+m}$$

Следователно, $(x, z) \in R^{k+m}$. Но $R^{k+m} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n = R'$. Тогава $(x, z) \in R'$. ✓

С това доказахме, че R' е надмножество на R и R' е транзитивна.

Остава да покажем, че R' е минимална по включване с тези свойства. Тоест, за произволна релация R'' , която е надмножество на R и е транзитивна, е в сила $R' \subseteq R''$. За целта е достатъчно е да се уверим, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ : R^n \subseteq R''$, което ще направим с индукция по n .

База: Нека $n = 1$. Тогава $R^n = R^1 = R$, а по допускане $R \subseteq R''$. Следователно, $R^1 \subseteq R''$. ✓

Индуктивно предположение: Нека за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е изпълнено, че $R^n \subseteq R''$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че $R^{n+1} \subseteq R''$. Нека $(x, z) \in R^{n+1}$ е произволна наредена двойка. Но $R^{n+1} = R^n \circ R$. Тогава $\exists y \in A : (x, y) \in R^n \wedge (y, z) \in R$. Съгласно индуктивното предположение, $R^n \subseteq R''$, тоест $(x, y) \in R''$. Също така $(y, z) \in R$, а $R \subseteq R''$. Щом R'' е транзитивна и $(x, y) \in R''$ и $(y, z) \in R''$, то $(x, z) \in R''$. Но (x, z) е произволна наредена двойка от R^{n+1} . Тогава $R^{n+1} \subseteq R''$. ✓

Така доказахме, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ : R^n \subseteq R''$. Тогава е вярно, че $R' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R^n \subseteq R''$. Следователно, R' е минималната по включване релация, която е транзитивна и е надмножество на R . Тоест, R' е транзитивното затваряне на R . ✓

В) За произволна релация P ще бележим транзитивното, симетричното и рефлексивното затваряне на релация P съответно с “ $\text{trans}(P)$ ”, “ $\text{sym}(P)$ ” и “ $\text{ref}(P)$ ”.

По отношение на релацията R , дефинираме

$$\begin{aligned} R_1 &:= \text{ref}(R) \\ R_2 &:= \text{sym}(R_1) \\ R_3 &:= \text{trans}(R_2) \end{aligned}$$

Тоест, $R_3 = \text{trans}(\text{sym}(\text{ref}(R)))$.

Първо ще докажем, че R_3 е релация на еквивалентност.

- Щом $R_3 = \text{trans}(R_2)$ е транзитивно затваряне, R_3 е транзитивна. ✓
- От дефиницията на затваряне следва, че $R \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$. Заради рефлексивността на $R_1 = \text{ref}(P)$ е в сила $\forall a \in A : aR_1a$. Но $R_1 \subseteq R_3$. Тогава $\forall a \in A : aR_3a$. Тоест, R_3 е рефлексивна. ✓
- Остава да покажем, че R_3 е симетрична. Първо ще докажем едно помощно твърдение.

Лема 3 Нека S е симетрична релация върху крайно множество. Тогава $\forall n \in \mathbb{N}^+ : S^n$ е симетрична.

Доказателство: Ще докажем с индукция по n .

База: Базовият случай е $n = 1$. Твърдението става “Ако S е симетрична, то S^1 е симетрична”, което очевидно е изпълнено.

ИП: Нека за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е изпълнено, че S^n е симетрична.

ИС: Ще докажем, че S^{n+1} е симетрична. Нека $(x, y) \in S^{n+1}$. По дефиниция, $S^{n+1} = S^n \circ S$. Тогава $\exists a \in A : (x, a) \in S \wedge (a, y) \in S^n$. Релацията S е симетрична и щом $(x, a) \in S$, то $(a, x) \in S$. Съгласно индуктивното предположение, S^n също е симетрична. Тогава, щом $(a, y) \in S^n$, то $(y, a) \in S^n$. Понеже $(y, a) \in S^n$ и $(a, x) \in S$, следва, че $(y, x) \in S^n \circ S$. Но $S^n \circ S = S^{n+1}$. Тогава $(y, x) \in S^{n+1}$. Следователно, S^{n+1} е симетрична. ✓

Съгласно **В)**, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R_2^n$ е $\text{trans}(R_2)$. Но $\text{trans}(R_2)$ е R_3 . Тогава $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R_2^n$ е R_3 .

Съгласно Лема 3, $\forall n \in \mathbb{N}^+ : (R_2)^n$ е симетрична. От **А)** знаем, че обединението запазва симетричността на релациите. Заклучаваме, че $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R_2^n$ е симетрична. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} R_2^n$ е R_3 . Заклучаваме, че R_3 симетрична. ✓

Щом R_3 е транзитивна, рефлексивна и симетрична, R_3 е релация на еквивалентност,

Това, че R_3 е надмножество на R , следва веднага от $R \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$ и транзитивността на съдържането като подмножество. И така, R_3 е релация на еквивалентност, която е надмножество на R .

Остава да покажем, че R_3 е най-малката с тези свойства по отношение на включването. За целта разглеждаме произволна релация на еквивалентност Q , която е надмножество на R . Ясно е, че такава съществува, понеже $A^2 \supseteq R$ е такава.

Първо ще покажем, че $R_2 \subseteq Q$. Нека $(x, y) \in R_2$. Следните три случая са изчерпателни.

Случай 1: $x = y$. Тогава $(x, y) \in Q$, защото Q е релация на еквивалентност, тоест, е и рефлексивна.

Случай 2: $x \neq y$ и $(x, y) \in R$. Но $R \subseteq Q$. Тогава $(x, y) \in Q$.

Случай 3: $x \neq y$ и $(x, y) \notin R$. Тогава $(x, y) \in R_2 \setminus R$. Но $R_2 = \text{sym}(R_1) = \text{sym}(\text{ref}(R))$. Понеже $x \neq y$ и $R_1 = \text{ref}(R) = R \cup \{(a, a) | a \in A\}$, в сила е $(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow (y, x) \in R \subseteq Q$. Тогава $(y, x) \in Q$. Но Q е симетрична. Следователно, $(x, y) \in Q$.

С това доказахме, че $R_2 \subseteq Q$.

Но Q е транзитивна и от това следва, че транзитивното затваряне на R_2 също трябва да се съдържа в Q . Тоест $R_3 = \text{trans}(R_2) \subseteq Q$. Но Q е произволна релация на еквивалентност, съдържаща R . Следователно, R_3 е най-малката по включване релация на еквивалентност, надмножество на R .

Г) Редът, в който правим затварянията, има значение. Ако вземем симетричното затваряне на транзитивното затваряне на рефлексивното затваряне на R , невинаги ще получаваме релация на еквивалентност.

Ето пример. Нека $A = \{x, y, z\}$ и нека $R = \{(x, y), (x, z)\}$. Дефинираме $R_1 := \text{ref}(R)$, $R_2 := \text{trans}(R_1)$ и $R_3 := \text{sym}(R_2)$, т.е. $R_3 = \text{sym}(\text{trans}(\text{ref}(R)))$. Тогава $R_1 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$, $R_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$ и $R_3 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, x), (x, z), (z, x)\}$. Забелязваме, че R_3 не е транзитивна, защото $(z, x) \in R_3$ и $(x, y) \in R_3$, но $(z, y) \notin R_3$. Тогава не можем и да твърдим, че R_3 е релация на еквивалентност. $\square$