

Контролно 1 на група 7

18 ноември 2025 г.

Задача 1. (20т.) Нека p , q и r са прости съждения. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

е тавтология.

Решение. Опростяваме израза, използвайки еквивалентни преобразувания.

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \equiv \quad // \text{свойство на импликацията}$$

$$(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)) \equiv \quad // \text{закон на Де Морган}$$

$$(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \rightarrow ((\neg \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \equiv \quad // \text{закон за двойното отрицание}$$

$$(\neg p \vee (\neg q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)) \equiv \quad // \text{асоциативност на дизюнкцията}$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \rightarrow ((p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r) \equiv \quad // \text{дистрибутивност на дизюнкция спрямо конюнкция}$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \rightarrow (((p \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r) \equiv \quad // \text{свойство на отрицанието}$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \rightarrow ((T \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r) \equiv \quad // \text{свойство на константата } T$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee r) \equiv \quad // \text{асоциативност на дизюнкцията}$$

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \rightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv \quad // \text{свойство на импликацията}$$

$$\neg(\neg p \vee \neg q \vee r) \vee (\neg p \vee \neg q \vee r) \equiv \quad // \text{свойство на отрицанието}$$

T

Получихме, че даденото съждение е тавтология.

Задача 2. (50 т.) Нека A е множество. Нека $Rel = \{S | S \subseteq A \times A\}$. Нека $R \subseteq Rel \times Rel$ е релация, дефинирана по следния начин:

$$\forall x, y \in Rel : (xRy \leftrightarrow (\exists z \subseteq A \times A : x \circ z = y))$$

Изследвайте релацията R за шестте свойства, изучавани на лекции и упражнения. Какъв тип релация, изучаван на лекции и упражнения, е релацията R ?

Решение. Разглеждаме шестте свойства, изучавани на лекции:

- *Рефлексивност:* Нека $x \in Rel$ е произволна релация от Rel . Нека $z = \{(a, a) | a \in A\} \subseteq A \times A$. Ще докажем, че $x \circ z = x$.

Нека $(a, b) \in x$ е произволна. Но $(a, a) \in z$. Тогава е ясно, че $(a, b) \in x \circ z$. Получаваме, че $x \subseteq x \circ z$.

Нека $(a, b) \in x \circ z$ е произволна. Тогава от дефиницията за композиция на релации следва, че $\exists c \in A : (a, c) \in z \wedge (c, b) \in x$. Но щом $(a, c) \in z$, то $a = c$. Така получаваме, че $x \ni (c, b) = (a, b)$. Но (a, b) беше произволна, тоест следва, че $x \circ z \subseteq x$.

Получихме, че $x \circ z = x$, тоест xRx . x беше произволна релация от Rel и тогава R е рефлексивна.

- *Антирефлексивност:* Щом R е рефлексивна, то знаем, че няма как R да бъде антирефлексивна. За контрапример достатъчно е да вземем произволна релация x и от горното знаем, че xRx .

- *Симетричност:* Ще покажем с контрапример, че R невинаги е симетрична. Нека $A = \{a\}$, $x = \{(a, a)\}$ и $y = \emptyset$. Ако вземем $z = \emptyset$, то очевидно $x \circ z = \emptyset = y$, а оттам и xRy . Но тъй като $y = \emptyset$,

то $\forall t \subseteq A \times A : y \circ t = \emptyset$. Тоест не е изпълнено, че $\exists z \subseteq A \times A : y \circ z = x$. Получаваме, че $\neg yRx$, и тогава R не е симетрична.

- *Антисиметричност:* Ще покажем с контрапример защо R невинаги е антисиметрична. Нека $A = \{a, b, c\}$ и $x = \{(a, b)\}$, $y = \{(c, b)\}$. Ако $z = \{(c, a)\}$, то $x \circ z = \{(c, b)\} = y$, тоест xRy . Ако $z = \{(a, c)\}$, то $y \circ z = \{(a, b)\} = x$, тоест yRx . Получихме, че xRy и yRx , но $x \neq y$, тогава R не може да бъде антисиметрична.
- *Силна антисиметричност:* Щом R не е антисиметрична, то няма как R да е и силно антисиметрична. За контрапример е достатъчно да покажем горното.
- *Транзитивност:* Ще докажем, че R е транзитивна. Нека $x, y, z \in Rel$ са произволни такива, че xRy и yRz . Щом xRy , то $\exists t \subseteq A \times A : x \circ t = y$. Щом yRz , то $\exists w \subseteq A \times A : y \circ w = z$. Но $x \circ t = y$, което като заместим във второто равенство получаваме $(x \circ t) \circ w = z$. Съгласно изучаваното от лекции композицията на релации е асоциативна, тоест $(x \circ t) \circ w = x \circ (t \circ w)$. Така получихме, че $x \circ (t \circ w) = z$, като е ясно, че $t \circ w \in Rel$. Следователно xRz . Но x, y, z бяха произволни и тогава R е транзитивна.

Получихме, че R е рефлексивна и транзитивна, тоест R е релация на преднаредба.

Задача 3. В магазин продават комплекти с по n кубчета, номерирани с числата от 1 до n . Всяко кубче е с цяло положително тегло.

а) Колко възможни комплекта има (изразено чрез n и m), в които сумарното тегло на кубчетата е m ? (10 т.)

б) Нека n е четно. Колко възможни комплекта има (изразено чрез n и m), в които сборът на теглата от кубчетата е m и за всеки две кубчета със сбор на номерата $n + 1$, точно едно от тях е с тегло 1? (20 т.)

#Бонус: (30 т.) Професор Пикачу купува за детето си специален комплект. Специален комплект е комплект с 8 кубчета с различни тегла, като всяко тегло е не повече от 15. Вкъщи детето се заиграва - то измерва абсолютната разлика от теглата на всяка двойка кубчета и всеки резултат го записва върху един лист. След като минава през всички различни двойки кубчета, детето забелязва, че има число, което се среща поне 3 пъти. Докажете, че какъвто и специален комплект да беше избрал професора, детето винаги щеше да получава число, което се среща поне 3 пъти.

Решение.

а) Задачата в тази подточка можем да я моделираме като задача, в която слагаме m неразличими топки в n различни кутии. Тъй като всяко тегло на кубче трябва да бъде положително, то за слагането трябва да е изпълнено, че във всяка кутия има поне по една топка. Съгласно изучаваното от лекции отговорът е $\binom{m-1}{m-n}$.

б) Тъй като n е четно, можем да разбием множеството $\{1, \dots, n\}$ на множествата $\{1, n\}, \{2, n-1\}, \dots, \{\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\}$. Това са $\frac{n}{2}$ множества, като те представляват всички двойки индекси на кубчета, точно едно от които трябва да бъде с тегло 1. Можем по $2^{\frac{n}{2}}$ начина да изберем от всяко множество индексът на кубчето, което ще е с тегло 1. За да си подсигуриим, че в тези двойки няма и двете кубчета да са с тегло 1, трябва, когато направим този избор за кубчето с тегло 1, да дадем тегло поне 2 на другото кубче. Ако се върнем на аналогията с топките и кутиите, на всяка двойка кутии от изброените раздаваме общо 3 топки, като в едната кутия слагаме точно 1 топка, а в другата - 2 топки. Двойките са $\frac{n}{2}$, така че ни остават $m - \frac{3n}{2}$ топки, които трябва да бъдат сложени без ограничения в тези $\frac{n}{2}$ кутии, в които сложихме 2 топки. Съгласно изучаваното от лекции броят на слаганията е $\binom{m - \frac{3n}{2} + \frac{n}{2} - 1}{\frac{n}{2} - 1} = \binom{m - n - 1}{\frac{n}{2} - 1}$. Общо получаваме $2^{\frac{n}{2}} \binom{m - n - 1}{\frac{n}{2} - 1}$.

#Бонус: Колкото до бонуса, разглеждаме възможните стойности за абсолютната разлика. Всяко тегло е цяло число между 1 и 15, тоест възможните разлики са цели числа между 1 и 14. Но абсолютна разлика 14 можем да получим само при една двойка - двойка кубчета с тегла 1 и 15. Ще разглеждаме разликите, различни от 14. Общият брой двойки, които детето може да избере, е $\binom{8}{2} = 28$, тоест броят двойки кубчета, чиято абсолютна разлика на теглата не е 14, е поне 27. Възможните стойности на разликите са целите числа между 1 и 13 включително, тоест 13 възможни стойности. Съгласно принципа на Дирихле има $\lceil \frac{27}{13} \rceil = 3$ двойки с една и съща стойност. С това доказахме, че какъвто и специален комплект да беше избрал професор Пикачу, винаги щеше да има 3 еднакви абсолютни разлики сред различните двойки кубчета.