

Първо малко контролно по Дискретни Структури на група 8, специалност
Компютърни науки, поток 2

20 ноември 2025 г.

Задача 1 (20 т.) Нека p, q и r са прости съждения. Докажете с еквивалентни преобразувания, че

$$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$$

е тавтология.

Решение: Първо трябва да обърнем внимание на реда на операциите. Както знаем, конюнкцията ($\wedge$) е с по-висок приоритет от импликацията ($\rightarrow$). Тогава, изразът всъщност може да се запише като

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$$

където вече ясно се вижда, че импликацията с консеквент ($q \vee r$) всъщност се прилага върху $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$, а не само върху $(\neg p \vee r)$.

Вече можем да докажем, че съждението е тавтология.

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r) \equiv \quad // \text{ свойство на импликацията}$$

$$\neg((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \equiv \quad // \text{ закон на De Morgan}$$

$$(\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee r)) \vee (q \vee r) \equiv \quad // \text{ закон на De Morgan}$$

$$((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r) \equiv \quad // \text{ двойно отрицание}$$

$$((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r)) \vee (q \vee r) \equiv \quad // \text{ асоциативност на дизюнкцията}$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \vee r) \equiv \quad // \text{ асоциативност на дизюнкцията}$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r) \vee q \vee r \equiv \quad // \text{ комутативност на дизюнкцията}$$

$$(\neg p \wedge \neg q) \vee q \vee (p \wedge \neg r) \vee r \equiv \quad // \text{ дистрибутивност на дизюнкцията над конюнкцията}$$

$$((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee (p \wedge \neg r) \vee r \equiv \quad // \text{ дистрибутивност на дизюнкцията над конюнкцията}$$

$$((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee ((p \vee r) \wedge (\neg r \vee r)) \equiv \quad // \text{ свойства на отрицанието}$$

$$((\neg p \vee q) \wedge T) \vee ((p \vee r) \wedge (\neg r \vee r)) \equiv \quad // \text{ свойства на отрицанието}$$

$$((\neg p \vee q) \wedge T) \vee ((p \vee r) \wedge T) \equiv \quad // \text{ свойства на константите}$$

$$(\neg p \vee q) \vee ((p \vee r) \wedge T) \equiv \quad // \text{ свойства на константите}$$

$$(\neg p \vee q) \vee (p \vee r) \equiv \quad // \text{ асоциативност на дизюнкцията}$$

$\neg p \vee q \vee p \vee r \equiv$ // комутативност на дизюнкцията

$\neg p \vee p \vee q \vee r \equiv$ // свойства на отрицанието

$T \vee q \vee r \equiv$ // свойства на константите

T

Това доказва, че съждението е еквивалентно на T , тоест е тавтология. Възможни са алтернативни решения. Показаното е изчерпателно с демонстративна цел.

Задача 2 Нека $S \subseteq (\mathbb{N}^2)^2$ е релация, дефинирана по следния начин:

$$\forall(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2 ((a, b)S(c, d) \leftrightarrow a + b = c + d)$$

За всяка наредена двойка $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ дефинираме множеството

$$[(a, b)] = \{(c, d) \in \mathbb{N}^2 | (a, b)S(c, d)\}$$

Нека $C = \{[(a, b)] | (a, b) \in \mathbb{N}^2\}$ е множеството от класовете на еквивалентност на S .

а) Да се докаже, че S е релация на еквивалентност. (15 т.)

б) Опишете класовете на еквивалентност на S . Крайно или безкрайно е C ? (10 т.)

Упътване: Едно възможно описание на класовете на еквивалентност е геометрично спрямо безкрайна таблица.

в) Нека $Q \subseteq C^2$ е релация, дефинирана по следния начин:

$$\forall A, B \in C (AQB \leftrightarrow ((A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \vee (\exists(b_1, b_2) \in B \forall(a_1, a_2) \in A (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2))))$$

Да се докаже, че Q е релация на частична наредба. (25 т.)

Решение:

а) Ще докажем, че S е релация на еквивалентност, тоест ще докажем, че тя е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Първо ще докажем, че S е рефлексивна. Нека $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Ще докажем $(a, b)S(a, b)$. Това е еквивалентно на $a + b = a + b$, което е очевидно вярно. Тогава наистина $(a, b)S(a, b)$, тоест S е рефлексивна.

Ще докажем, че S е симетрична. Нека $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$, $(a, b) \neq (c, d)$ са такива, че $(a, b)S(c, d)$. Ще докажем, че $(c, d)S(a, b)$. $(a, b)S(c, d)$ е еквивалентно на $a + b = c + d$. Поради симетричността на равенството на естествени числа, то е вярно и $c + d = a + b$. Но това е еквивалентно на $(c, d)S(a, b)$, което искахме да докажем, тоест S е симетрична.

Ще докажем, че S е транзитивна. Нека $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N}^2$ са такива, че $(a, b)S(c, d)$ и $(c, d)S(e, f)$. Искаме да докажем, че $(a, b)S(e, f)$. $(a, b)S(c, d)$ е еквивалентно на $a + b = c + d$. От друга страна, $(c, d)S(e, f)$ е еквивалентно на $c + d = e + f$. Очевидно от транзитивността на равенството на естествени числа $a + b = e + f$. Но това е еквивалентно на $(a, b)S(e, f)$, което искахме да докажем. Тоест, S е транзитивна.

Тъй като S е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) Класовете на еквивалентност на S са множествата от наредени двойки над естествените числа, за които сумата от елементите на всеки две е равна. По-точно, C също може да се запише като $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$, където $C_i = \{(a, b) \in \mathbb{N} | a + b = i\}$ за всяко $i \in \mathbb{N}$.

Алтернативно, всеки клас на еквивалентност е множеството от точки на диагонал в безкрайна таблица с координати от естествените числа. По-точно можем да кажем, че всеки клас на еквивалентност е множеството от точки на диагонал в първи квадрант на целочислена решетка. Множеството C е безкрайно.

Пояснение (за демонстрация, не е нужно и не се оценява): Това можем да видим като покажем инекция $f : \mathbb{N} \rightarrow C$, тъй като знаем, че $\mathbb{N}$ е безкрайно и е ясно, че ако има инекция от безкрайно множество в друго множество, то то също е безкрайно (записваме $|\mathbb{N}| \leq |C|$). Избираме функцията

$$f(n) = [(n, 0)] \forall n \in \mathbb{N}$$

Да допуснем, че съществуват $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \neq n_2$, такива че $f(n_1) = f(n_2)$. Тогава $[(n_1, 0)] = [(n_2, 0)]$, тоест $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2 ((a, b) \in [(n_1, 0)] \leftrightarrow (a, b) \in [(n_2, 0)])$. Нека изберем $(a, b) \in [(n_1, 0)]$, като такава двойка съществува, тъй като S е рефлексивна и съответно $[(n, 0)]$ е непразно множество за произволно n . Тогава $(a, b)S(n_1, 0)$, тоест $a + b = n_1 + 0 = n_1$. Но от допускането, $(a, b) \in [(n_2, 0)]$, тоест $a + b = n_2 + 0 = n_2$. Тогава $a + b = n_1 = n_2 = a + b$. Получава се, че $n_1 = n_2$, което е противоречие, тоест f е инекция и C е безкрайно.

в) Първо ще опростим дефиницията за Q . Забелязваме, че $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ е еквивалентно на $(A = B)$. Получаваме:

$$\forall A, B \in C (AQB \leftrightarrow ((A = B) \vee (\exists (b_1, b_2) \in B \forall (a_1, a_2) \in A (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)))$$

Ще докажем, че Q е релация на частична наредба, тоест ще докажем, че тя е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Първо ще докажем, че Q е рефлексивна. Взимаме произволно $A \in C$. Искаме да докажем, че AQA . Това означава да е изпълнено $((A = A) \vee (\exists (b_1, b_2) \in A \forall (a_1, a_2) \in A (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)))$. Но очевидно $(A = A)$, тоест трябва да е изпълнено $(T \vee (\exists (b_1, b_2) \in A \forall (a_1, a_2) \in A (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)))$, което е винаги T (от свойства на константите). Тогава Q е рефлексивна.

Ще докажем, че Q е антисиметрична. Нека имаме $A, B \in C, A \neq B$ и AQB . Искаме да докажем, че $\neg BQA$. Да допуснем BQA . Тъй като сме избрали $A \neq B$, можем да разглеждаме само втората част от дефиницията:

$$\forall A, B \in C (AQB \leftrightarrow ((\exists (b_1, b_2) \in B \forall (a_1, a_2) \in A (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)))$$

Тъй като AQB , съществува $(b_1, b_2) \in B$, такава че $\forall (a_1, a_2) \in A$ е изпълнено $(a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$. Нека фиксираме това (b_1, b_2) . От друга страна, тъй като BQA , съществува $(a_3, a_4) \in A$, такава че $\forall (b_3, b_4) \in B$ е изпълнено $(b_3 \leq a_3 \wedge b_4 \leq a_4)$. Нека фиксираме (a_3, a_4) . Тогава, по дефиниция е изпълнено

$$(a_3 \leq b_1 \wedge a_4 \leq b_2)$$

тъй като наистина $(a_3, a_4) \in A$. От друга страна е изпълнено и

$$(b_1 \leq a_3 \wedge b_2 \leq a_4)$$

тъй като наистина $(b_1, b_2) \in B$. От антисиметричността на $\leq$ в $\mathbb{N}$ получаваме, че $b_1 = a_3$ и $b_2 = a_4$, тоест $(b_1, b_2) = (a_3, a_4)$. Но A и B са различни класове на еквивалентност на S , тоест $A \cap B = \emptyset$, а

ние получихме $(b_1, b_2) \in A \cap B$, което е противоречие. Тогава е единствено възможно да е грешно допускането, че BQA , тоест наистина $\neg BQA$, което доказва, че Q е антисиметрична.

Ще докажем, че Q е транзитивна. Нека имаме $A, B, D \in C$, такива че AQB и BQD . Ще докажем, че AQD . Ако $A = B$ или $B = D$, то AQD тривиално по дефиницията на Q . Оттук нататък приемаме, че $A \neq B$ и $B \neq D$. Ще разглеждаме отново само втората част на дефиницията:

$$\forall A, B \in C (AQB \leftrightarrow (\exists (b_1, b_2) \in B \forall (a_1, a_2) \in A (a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)))$$

От AQB съществува $(b_1, b_2) \in B$, такова че за всяко $(a_1, a_2) \in A$ ($a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2$). Нека фиксираме (b_1, b_2) . От BQD съществува $(d_1, d_2) \in D$, такова че за всяко $(b_3, b_4) \in B$ ($b_3 \leq d_1 \wedge b_4 \leq d_2$). Нека фиксираме (d_1, d_2) . В частност, тъй като $(b_1, b_2) \in B$, то $(b_1 \leq d_1 \wedge b_2 \leq d_2)$. Но $(a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$. Тогава $(a_1 \leq d_1 \wedge a_2 \leq d_2)$. Но (a_1, a_2) е произволно. Тоест, съществува $(d_1, d_2) \in D$, такова, че за всяко $(a_1, a_2) \in A$ ($a_1 \leq d_1 \wedge a_2 \leq d_2$). Това е еквивалентно на AQD , което искахме да докажем, тоест Q е транзитивна.

Тъй като Q е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, то тя е релация на частична наредба.

Задача 3: Професор Дълбоков, след поредица от математически открития, решава да отпразнува. Той иска да покани свои приятели и колеги, които ще разположи на кръгла маса. Гостите на професор Дълбоков са претенциозни и имат изисквания за своето разположение на масата. За да се справи по-лесно с тези изисквания, професор Дълбоков разделя гостите си на 4 групи:

- Гостите от синята група нямат никакви изисквания.
- Всеки гост от червената група иска задължително да има гост от синята група на стола директно вляво от него (тоест, първия стол отляво спрямо госта).
- Всеки гост от зелената група иска задължително да има празен стол директно вдясно от него (тоест, първия стол отдясно спрямо госта).
- Гостите от жълтата група искат да седят заедно, тоест искат да са подредени един до друг в последователен блок.

Професорът е поканил n гости. Всеки гост е в точно една от групите. Известно е, че има n_b гости от синята група, n_r гости от червената група, n_g гости от зелената група и n_y гости от жълтата група. Също е известно, че гостите от синята група са поне толкова, колкото тези от червената група, тоест $n_b \geq n_r$.

- а) От колко стола се нуждае професорът? (5 т.)
- б) По колко начина може професорът да нареди гостите от жълтата група в линеен блок? (5 т.)
- в) По колко начина може професорът да избере по един гост от синята група за всеки гост от червената група? (5 т.)
- г) Колко от гостите в синята група остават неразпределени? (5 т.)
- д) По колко начина може професорът да нареди своите гости около кръглата маса? (30 т.)

Решение: а) Професорът трябва да купи n стола, на които да стоят гостите и още n_g стола за гостите от зелената група, които ще останат незаети. Това са общо $n + n_g$ стола.

б) Има n_y гости от жълтата група. В линеен блок можем да наредим гостите от жълтата група по $n_y!$ начина (можем да изберем един от n_y гости за първа позиция, един от $n_y - 1$ гости за втора позиция и т.н.).

в) Разпределяме по един гост от n_b гости на всеки гост от червената група, които са n_r . Важно е да забележим, че няма нужда да разглеждаме нареждането на гостите от червената група. Тоест,

можем да си представим, че гостите от червената група са позициите, на които нареждаме n_b гости от синята група. Тогава имаме конфигурация с наредба без повторение с опорно множество с големина n_b и големина на структурите n_r . Както знаем,

$$|K_H(n_b, n_r)| = n_b^{\frac{n_r}{b}} = n_b(n_b - 1)(n_b - 2) \cdots (n_b - n_r + 1)$$

г) Разпределихме n_r гости от синята група на гостите от червената група. Остават $n_b - n_r$ неразпределени гости от синята група.

д) Ще решим задачата като определим блокове, които ще наредим около кръгла маса.

Гостите от жълтата група искат да седят един до друг. Тогава те определят един блок на кръглата маса. Както вече намерихме, в блока можем да ги наредим по $n_y!$ начина.

Всеки гост от червената група иска задължително да има гост от синята група на стола директно вляво от него. Тогава ще определим n_r блока от вида (b, r) , където b е гост от синята група, а r е гост от червената група. В нареждането около кръглата маса, индивидуален блок се определя единствено от госта от червената група. Тогава предварително трябва да разпределим гости от синята група на гостите от червената. Както открихме, има $n_b^{\frac{n_r}{b}}$ начина да направим това.

Гостите от синята група нямат изисквания. След разпределянето остават $n_b - n_r$ гости от синята група. Всеки определя отделен блок.

Всеки от гостите от зелената група определя отделен блок, тоест имат общо n_g такива блока. Ключовото наблюдение е, че празните столове са неразличими. Тогава наистина всеки такъв блок е уникално определен само от гостът от зелената група около кръглата маса.

Открихме, че имаме общо $1 + n_r + n_b - n_r + n_g = 1 + n_b + n_g$ блока. Знаем, че можем да наредим n елемента около n -местна кръгла маса по $(n - 1)!$ начина. Тогава, можем да наредим блоковете около кръглата маса по $((1 + n_b + n_g) - 1)! = (n_b + n_g)!$ начина. Но не трябва да забравяме, че имаме допълнителни вътрешни подреждания за жълтите и червените блокове, съответно $n_y!$ и $n_b^{\frac{n_r}{b}}$. По принцип на умножението получаваме, че търсената формула е

$$(n_b + n_g)!(n_y!)(n_b^{\frac{n_r}{b}})$$

По точно толкова начина може професорът да нареди гостите си около кръглата маса.