

Зад. 1 Нека $p_1, \dots, p_{11}$ са прости съждения. Разгледайте следното съставно съждение:

$$((p_1 \wedge p_{11}) \vee ((p_2 \wedge p_{10}) \vee ((p_3 \wedge p_9) \vee ((p_4 \wedge p_8) \vee ((p_5 \wedge p_7) \vee p_6)))))) \vee (p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow (p_{10} \rightarrow (p_{11} \rightarrow p_{11}))))))$$

Какво е това съждение: тавтология, условност или противоречие? Обосновете добре отговорите си.

Решение: Нека

$$A = ((p_1 \wedge p_{11}) \vee ((p_2 \wedge p_{10}) \vee ((p_3 \wedge p_9) \vee ((p_4 \wedge p_8) \vee ((p_5 \wedge p_7) \vee p_6))))))$$

$$B = (p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow (p_{10} \rightarrow (p_{11} \rightarrow p_{11}))))))$$

Съставното съждение, дадено в условието, изразено чрез A и B , е $A \vee B$. Твърдим, че $B \equiv T$. Наистина,

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow (p_{10} \rightarrow (p_{11} \rightarrow p_{11})))))) \equiv \quad // \text{ свойство на импликацията}$$

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow (p_{10} \rightarrow (\neg p_{11} \vee p_{11})))))) \equiv \quad // \text{ свойство на отрицанието}$$

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow (p_{10} \rightarrow T)))) \equiv \quad // \text{ свойство на импликацията}$$

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow (\neg p_{10} \vee T)))) \equiv \quad // \text{ свойство на константите}$$

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (p_9 \rightarrow T))) \equiv \quad // \text{ свойство на импликацията}$$

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow (\neg p_9 \vee T))) \equiv \quad // \text{ свойство на константите}$$

$$(p_7 \rightarrow (p_8 \rightarrow T)) \equiv \quad // \text{ свойство на импликацията}$$

$$(p_7 \rightarrow (\neg p_8 \vee T)) \equiv \quad // \text{ свойство на константите}$$

$$p_7 \rightarrow T \equiv \quad // \text{ свойство на импликацията}$$

$$\neg p_7 \vee T \equiv \quad // \text{ свойство на константите}$$

$$T$$

Тогава даденото съставно съждение е еквивалентно на $A \vee T$. Но това е еквивалентно на T , съгласно свойство на константите. Тогава даденото съставно съждение е тавтология.

Зад. 2 Разгледайте безкрайната редица от реални числа $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, дефинирана по следния начин:

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = \sqrt{1 + 2x_n}, \text{ за всяко } n \geq 1$$

Докажете по индукция, че $x_n < 4$ за всяко цяло положително n .

Решение: Базата е $n = 1$. Тогава $x_n = x_1 = 1$. Наистина, $1 < 4$, така че в базовия случай твърдението е вярно.

Индуктивното предположение е, че за някое $n \geq 1$ е в сила $x_n < 4$.

Ще докажем, че $x_{n+1} < 4$. Наистина,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \quad // \text{ по дефиниция} \\ &= \sqrt{1 + 2x_n} \quad // \text{ съгласно индуктивното предположение} \\ &< \sqrt{1 + 2 \cdot 4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

И така, $x_{n+1} < 3$. От това следва, че $x_{n+1} < 4$.

□

Зад. 3 Нека X и Y са произволни множества.

А) Докажете или опровергайте, че $X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$.

Б) Докажете или опровергайте, че $X \setminus (X \setminus Y) = X \cap Y$.

Решение: Условието говори за допълнение на множество. Както знаем от лекции, това допълнение е по отношение на някакъв универсум U . Той не е даден явно, но неявно присъства заради " $\bar{Y}$ ".

А) Твърдението е вярно. Ето доказателство. По определение,

$$X \setminus Y = \{a \mid a \in X \wedge a \notin Y\}$$

По определение, $a \notin Y$ тстк $a \in \bar{Y}$. Тогава

$$X \setminus Y = \{a \mid a \in X \wedge a \in \bar{Y}\}$$

Но по определение,

$$\{a \mid a \in X \wedge a \in \bar{Y}\} = X \cap \bar{Y}$$

Заклучаваме, че $X \setminus Y = X \cap \bar{Y}$.

Б) Твърдението е вярно. Ще го докажем, ползвайки резултата от **А**).

$$X \setminus (X \setminus Y) = \quad // \text{ съгласно А)}$$

$$X \setminus (X \cap \bar{Y}) = \quad // \text{ съгласно А)}$$

$$X \cap \overline{(X \cap \bar{Y})} = \quad // \text{ закон на De Morgan}$$

$$X \cap (\bar{X} \cup \bar{\bar{Y}}) = \quad // \text{ закон за двойното отрицание}$$

$$X \cap (\bar{X} \cup Y) = \quad // \text{ дистрибутивност на сечение спрямо обединение}$$

$$(X \cap \bar{X}) \cup (X \cap Y) = \quad // \text{ свойство на допълнението}$$

$$\emptyset \cup (X \cap Y) = \quad // \text{ свойство на допълнението}$$

$$X \cap Y$$

Кое то и трябваше да покажем. □

Зад. 4 Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Разглеждаме произволно множество A , такова че $|A| = n$. Нека $R \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност.

А) Нека $A_1, \dots, A_k$ са класовете на еквивалентност на R . За всяко $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, R_i се дефинира така:

$$R_i = \{(x, y) \in R \mid x \in A_i \wedge y \in A_i\}$$

Докажете или опровергайте, че $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ е разбиване на R .

Б) Докажете или опровергайте, че $|R|$ е нечетно тогава и само тогава, когато n е нечетно.

Решение: Нека $S = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$.

А) Твърдението е вярно. Ще докажем, че S е разбиване на R .

- Това, че $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : R_i \subseteq R$, е очевидно от дефиницията на R_i .
- Ще докажем, че $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : R_i \neq \emptyset$. Наистина, всеки клас на еквивалентност A_i е непразен, както знаем от лекции. За всяко $a \in A_i$, наредената двойка (a, a) е елемент на R_i , понеже R е рефлексивна. Тогава $R_i \neq \emptyset$, за всяко $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
- Ще докажем, че $\bigcup_{i=1}^k R_i = R$. Тоест, че всяка наредена двойка от R е елемент на поне един клас от S . Да допуснем противното: съществува $(a, b) \in R$, която не е елемент на никой клас от S .

От лекции знаем, че $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ е разбиване на A . Заклучаваме, че a е елемент на някой елемент на $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ и b е елемент на някой елемент на $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$. Щом (a, b) не е елемент на никой клас от S , трябва a и b да са елементи на различни елементи на $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$. Тогава $a \in A_i$ и $b \in A_j$, за някои i и j , такива че $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $i \neq j$.

Както знаем от лекции, всеки клас на еквивалентност на R е множеството $[z] = \{w \in A \mid zRw\}$, за някое $z \in A$. Тогава $A_i = [x]$ и $A_j = [y]$, за някои $x, y \in A$. При това $x \neq y$, инак A_i и A_j биха съвпадали.

Разглеждаме произволно $d \in A_i$. В сила е xRd по определението на $[x]$. Но тогава dRx , понеже R е симетрична. В сила е xRa , тъй като $a \in [x]$. Тогава dRa , понеже R е транзитивна. Тогава dRb , понеже R е транзитивна. Но yRb , понеже $b \in [y]$. Тогава bRy , понеже R е симетрична. Тогава dRy , понеже R е транзитивна. Тогава yRd , понеже R е симетрична. Покажахме, че $d \in [y]$, тоест, $d \in A_j$. Но d е произволен елемент на A_i . Тогава $A_i \subseteq A_j$.

Аналогично показваме, че $A_j \subseteq A_i$. Заклучаваме, че $A_i = A_j$. Това противоречи на допускането, че A_i и A_j са различни. Оттук следва, че допускането, че съществува наредена двойка $(a, b) \in R$, която не е елемент на никой клас от S , е невярно. Тогава $\bigcup_{i=1}^k R_i = R$.

- Ще докажем, че $R_i \cap R_j = \emptyset$ за всички i, j , такива че $1 \leq i < j \leq k$. Допускаме противното: за някои i, j , такива че $1 \leq i < j \leq k$, $R_i \cap R_j \neq \emptyset$.

Тогава съществува поне една наредена двойка $(a, b) \in R_i \cap R_j$. От дефинициите на R_i и R_j следва, че $a \in A_i$ и $b \in A_i$, а също така $a \in A_j$ и $b \in A_j$. Тогава A_i и A_j имат непразно сечение. Но това е невъзможно, защото $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ е разбиване на A . Заклучаваме, че $R_i \cap R_j = \emptyset$ за всички i, j , такива че $1 \leq i < j \leq k$.

Следователно, S е разбиване на R .

Б) Твърдението е вярно и сега ще го докажем. Вече показахме в **А)**, че $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ е разбиване на R . Тогава $|R| = |R_1| + |R_2| + \dots + |R_k|$. Нека $|A_i| = n_i$, за $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогава $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

От лекции знаем, че за всеки клас на еквивалентност A_i , всеки елемент от A_i е в релация с всеки елемент на A_i , включително и със себе си. Веднага следва, че $R_i = A_i^2$. Тогава $|R_i| = n_i^2$, откъдето

$$|R| = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2$$

Твърдим, че n и $|R|$ имат една и съща четност. Както е добре известно,

$$\underbrace{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)^2}_n = \underbrace{n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_k^2}_{|R|} + \underbrace{2n_1n_2 + \dots + 2n_{k-1}n_k}_{\text{четно число}}$$

Тъй като $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, заключаваме, че n^2 е равно на $|R|$ плюс някакво четно число. От това следва, че $|R|$ е нечетно тстк n^2 е нечетно. Но n^2 е нечетно тстк n е нечетно. Заклучаваме, че $|R|$ е нечетно тстк n е нечетно. Което и трябваше да покажем. $\square$

Зад. 5 Нека A , B и C са произволни крайни непразни множества. Дадени са някакви функции $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$.

А) Докажете или опровергайте, че ако f и g са инекции, то $g \circ f$ е инекция.

Б) Докажете или опровергайте, че ако $g \circ f$ е биекция, то f е биекция или g е биекция,

Решение:

А) Твърдението е вярно. Първо ще покажем, че $g \circ f$ е функция. По дефиниция,

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in f \wedge (b, c) \in g\}$$

Изразено чрез типичната за функциите нотация, това става

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : f(a) = b \wedge g(b) = c\}$$

Искаме да покажем, че

$$\forall a \in A \exists ! c \in C : g \circ f(a) = c \tag{1}$$

Разглеждаме произволен елемент $a' \in A$. Знаем, че f е функция от A в B . Тогава съществува единствен $b' \in B$, такъв че $f(a') = b'$. Знаем, че g е функция от B в C . Тогава съществува единствен $c' \in C$, такъв че $g(b') = c'$. Тогава $g \circ f(a') = c'$. Тъй като a' е произволен, (1) следва веднага.

Ще покажем, че $g \circ f$ е инекция. Да разгледаме произволни $a', a'' \in A$, такива че $a' \neq a''$. Да кажем, че $f(a') = b'$ и $f(a'') = b''$, където $b', b'' \in B$. Тъй като f е инекция, $b' \neq b''$. Да кажем, че $g(b') = c'$ и $g(b'') = c''$, където $c', c'' \in C$. Тъй като g е инекция, $c' \neq c''$. Остава да отбележим, че $g \circ f(a') = c'$ и $g \circ f(a'') = c''$.

Тъй като a' и a'' са произволни, доказахме, че всеки два различни елемента от домейна на $g \circ f$ се изобразяват в различни елементи от кодомейна на $g \circ f$. Тогава $g \circ f$ е инекция.

Б) Твърдението не е вярно. Ето контрапример. Нека $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ и $C = \{\alpha, \beta\}$. Нека f е тази функция от A в B : $f(1) = a$, $f(2) = c$. Нека g е тази функция от B в C : $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, $g(c) = \beta$. Очевидно $g \circ f$ е тази функция от A в C : $g \circ f(1) = \alpha$, $g \circ f(2) = \beta$. Виждаме, че $g \circ f$ наистина е биекция от A в C . Но нито f е биекция, нито g е биекция! f не е сюрекция, а g не е инекция.