

Име: Ф№: Група:

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
от максимално	20	30	10	10	20	30	120

Всички отговори трябва да бъдат добре обосновани. Всичко изучавано на лекции или давано на домашно може да се ползва наготово. Всичко друго трябва да се изведе или докаже подробно и прецизно.

Зад. 4 Даден е квадрат 3×3 , разбит на девет квадратчета 1×1 ето така:

Във всяко от деветте квадратчета е записано точно едно число от $\{-1, 0, 1\}$. Разгледайте сумите по редове, сумите по колони и сумите по големите диагонали. Докажете, че поне две от тези суми са равни.

Зад. 5 Нека A , B и C са множества. Нека $R_3 \subseteq A \times B$, $R_1 \subseteq B \times C$ и $R_2 \subseteq B \times C$ са релации. Докажете или опровергайте, че

$$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$

Зад. 6 На лекции разгледахме числата на Стирлинг от втори род. Числото на Стирлинг от втори род $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ е броят на начините да бъде разбито n -елементно множество на точно k дяла.

5 т. **А)** Докажете с комбинаторни разсъждения, че ако $n, k \in \mathbb{N}^+$, то

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$$

Упътване: въпреки че изведохме това на лекции с комбинаторни разсъждения, тук се иска да го изведете пак. Разгледайте произволно множество A с $n \geq 1$ елемента и мислете за неговите разбивания на $k \geq 1$ дяла. Фиксирайте произволен елемент $a \in A$. В колко разбивания има дял $\{a\}$, тоест, a е сам в дял? В колко разбивания няма дял $\{a\}$, тоест, a е в дял с поне още един елемент?

25 т. **Б)** Нека x е реална променлива. Докажете по индукция, че за всяко $n \in \mathbb{N}^+$:

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}$$

където нотацията $x^{\underline{k}}$ е кратък запис за $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$.

Упътване: използвайте твърдението от **А**).