

Зад. 1 Докажете с комбинаторни разсъждения, че за всяко $n \in \mathbb{N}^+$ е в сила

$$3^n - 2^n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k}$$

Решение: Бинарните вектори са векторите над $\{0, 1\}$. Да дефинираме, че *тернарните вектори* са векторите над $\{0, 1, 2\}$. Нека B_n е множеството от бинарните вектори с дължина n , а T_n е множеството от тернарните вектори с дължина n . От лекцията за комбинаторни структури знаем, че $|B_n| = 2^n$ и $|T_n| = 3^n$. Предвид това, лявата страна $3^n - 2^n$ е $|T_n \setminus B_n|$ съгласно принципа на изваждането. А $T_n \setminus B_n$ е множеството от тернарните вектори с дължина n , имащи поне един елемент 2.

Дясната страна също брой $T_n \setminus B_n$, но по-подробно. Щом има поне едно 2, можем да направим разбиване на $T_n \setminus B_n$ по позицията на най-лявото 2, като тази позиция е елемент на $\{1, 2, \dots, n\}$. Нека

$$X_{n,\ell} = \{x \in T_n \setminus B_n \mid \text{най-лявото } 2 \text{ в } x \text{ е на позиция } \ell\}$$

Очевидно $\{X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}\}$ е разбиване на $T_n \setminus B_n$, така че, по принципа на разбиването,

$$|T_n \setminus B_n| = \sum_{\ell=1}^n |X_{n,\ell}|$$

Твърдим, че $|X_{n,\ell}| = 2^{\ell-1} 3^{n-\ell}$. Наистина, всеки вектор x от $X_{n,\ell}$ започва с $\ell - 1$ на брой нули или единици, след това има двойка на позиция ℓ и след това, на позиции $\ell + 1, \dots, n$ има нули или единици или двойки. Тъй като двойката на позиция ℓ е фиксирана, имаме право да кажем, че x е комбинация от един бинарен вектор с дължина $\ell - 1$ и един тернарен вектор с дължина $n - \ell$.

Щом $|X_{n,\ell}| = 2^{\ell-1} 3^{n-\ell}$, в сила е

$$\sum_{\ell=1}^n |X_{n,\ell}| = \sum_{\ell=1}^n 2^{\ell-1} 3^{n-\ell}$$

Да положим $k = \ell - 1$, което е същото като $\ell = k + 1$. Комбинаторно, смисълът на k е дължината на подвектора преди най-лявата двойка. Алгебрично,

$$\sum_{\ell=1}^n 2^{\ell-1} 3^{n-\ell} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k}$$

Заклучаваме, че

$$|T_n \setminus B_n| = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k}$$

Тоест,

$$3^n - 2^n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k}$$

Което и трябваше да покажем. □

Зад. 2 Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Булева матрица $n \times n$ е матрица $n \times n$, чиито елементи са от $\{0, 1\}$. Нека M_n е множеството от булевите матрици $n \times n$. Нека A_n е множеството, дефинирано по следния начин:

$$A_n = \{X \in M_n \mid \text{всеки ред на } X \text{ има поне едно } 1 \text{ и всяка колона на } X \text{ има поне едно } 1\}$$

А) Колко е $|M_n|$?

Б) Колко е $|A_n|$?

Решение, А): Всяка $n \times n$ матрица има n^2 елемента. Шом е булева, за всеки елемент има две възможни стойности, независимо от останалите елементи. Тогава $|M_n| = 2^{n^2}$.

Решение, Б): Нека “нулев ред” означава “ред, състоящ се само от нули” и “нулева колона” означава “колона, състояща се само от нули”. Във всеки ред да има поне една единица е същото като да няма нулев ред. Във всяка колона да има поне една единица е същото като да няма нулева колона. Нулев ред или колона ще наричаме “нарушител”. Искаме да намерим броя на матриците без нарушители. Ще използваме принципа на включването и изключването.

Нека S_t е множеството от матриците с поне t нарушители. Очевидно $0 \leq t \leq 2n$ и тези граници са точни. Забележете, че $S_0 = M_n$, защото $t = 0$ означава, че няма ограничения върху матриците. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|A_n| = |S_0| - |S_1| + |S_2| - |S_3| + \dots + (-1)^{2n} |S_{2n}|$$

Накратко,

$$|A_n| = \sum_{t=0}^{2n} (-1)^t |S_t|$$

Да въведем още една нотация. Нека $S_{k,\ell}$ е множеството от матриците с поне k нарушители-редове и поне ℓ нарушители-колони, като $0 \leq k, \ell \leq n$. Тогава, за всяко $t \in \{0, 1, \dots, 2n\}$,

$$|S_t| = \sum_{\substack{k+\ell=t \\ 0 \leq k, \ell \leq n}} |S_{k,\ell}|$$

Тогава

$$|A_n| = \sum_{t=0}^{2n} (-1)^t \sum_{\substack{k+\ell=t \\ 0 \leq k, \ell \leq n}} |S_{k,\ell}| = \sum_{t=0}^{2n} \sum_{\substack{k+\ell=t \\ 0 \leq k, \ell \leq n}} (-1)^{k+\ell} |S_{k,\ell}|$$

Лесно се вижда, че всяка наредена двойка индекси (k, ℓ) за $0 \leq k, \ell \leq n$ се появява точно веднъж в двойната сума, така че изразът вдясно може да се препише като $\sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n (-1)^{k+\ell} |S_{k,\ell}|$. Тогава

$$|A_n| = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n (-1)^{k+\ell} |S_{k,\ell}|$$

Да намерим $|S_{k,\ell}|$. За всеки избор на k редове-нарушители и ℓ колони-нарушители, остават $(n-k)(n-\ell)$ клетки на матрицата извън тези нарушители и има точно $2^{(n-k)(n-\ell)}$ начина тези клетки да се запълнят с нули или единици. Има $\binom{n}{k}$ начина да бъдат избрани редовете-нарушители и $\binom{n}{\ell}$ начина да бъдат избрани колоните-нарушители. И така,

$$|S_{k,\ell}| = \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} 2^{(n-k)(n-\ell)}$$

Тогава

$$|A_n| = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n (-1)^{k+\ell} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} 2^{(n-k)(n-\ell)} \quad (1)$$

Бърза проверка на ръка показва, че $|A_1| = 1$ и $|A_2| = 7$, а за $n = 1$ и $n = 2$, дясната страна на (1) дава

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^1 \sum_{\ell=0}^1 (-1)^{k+\ell} \binom{1}{k} \binom{1}{\ell} 2^{(1-k)(1-\ell)} = \\ & (-1)^{0+0} \binom{1}{0} \binom{1}{0} 2^{(1-0)(1-0)} + (-1)^{0+1} \binom{1}{0} \binom{1}{1} 2^{(1-0)(1-1)} + \\ & (-1)^{1+0} \binom{1}{1} \binom{1}{0} 2^{(1-1)(1-0)} + (-1)^{1+1} \binom{1}{1} \binom{1}{1} 2^{(1-1)(1-1)} = \\ & 2 - 1 - 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^2 \sum_{\ell=0}^2 (-1)^{k+\ell} \binom{2}{k} \binom{2}{\ell} 2^{(2-k)(2-\ell)} = \\ & (-1)^{0+0} \binom{2}{0} \binom{2}{0} 2^{(2-0)(2-0)} + (-1)^{0+1} \binom{2}{0} \binom{2}{1} 2^{(2-0)(2-1)} + (-1)^{0+2} \binom{2}{0} \binom{2}{2} 2^{(2-0)(2-2)} + \\ & (-1)^{1+0} \binom{2}{1} \binom{2}{0} 2^{(2-1)(2-0)} + (-1)^{1+1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} 2^{(2-1)(2-1)} + (-1)^{1+2} \binom{2}{1} \binom{2}{2} 2^{(2-1)(2-2)} + \\ & (-1)^{2+0} \binom{2}{2} \binom{2}{0} 2^{(2-2)(2-0)} + (-1)^{2+1} \binom{2}{2} \binom{2}{1} 2^{(2-2)(2-1)} + (-1)^{2+2} \binom{2}{2} \binom{2}{2} 2^{(2-2)(2-2)} = \\ & 16 - 8 + 1 - 8 + 8 - 2 + 1 - 2 + 1 = 7 \end{aligned}$$

(1) може да се опрости така:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n (-1)^{k+\ell} \binom{n}{k} \binom{n}{\ell} 2^{(n-k)(n-\ell)} = \\ & \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \underbrace{(-1)^k \binom{n}{k}}_{\text{не зависи от } \ell} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} 2^{(n-k)(n-\ell)} = \\ & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{n}{\ell} 2^{(n-k)(n-\ell)} = \\ & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} (-1)^\ell \left(2^{(n-k)}\right)^{(n-\ell)} = \quad // \text{ съгласно } (x+y)^n = \sum_{\ell=0}^n x^\ell y^{n-\ell} \text{ с } x = -1 \text{ и } y = 2^{n-k} \\ & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^n \end{aligned} \quad (2)$$

Изразът (2) може да се получи и със следните комбинаторни разсъждения, но те са по-сложни от разсъжденията за (1). Ние получихме (1), третирайки редовете и колоните еднакво. Сега третираме редовете и колоните различно.

Пак мислим за булевите матрици $n \times n$. Колко са възможните запълвания на първия ред, в които има поне една единица? Очевидно те са $2^n - 1$, защото от всички 2^n възможни запълвания махаме запълването само с нули, а то е едно единствено. И изобщо, за ред i , където $1 \leq i \leq n$, възможните запълвания на i -ия ред, в които има поне една единица, са $2^n - 1$. Тогава възможните запълвания на матрица $n \times n$, в които всеки ред има поне една единица, са $(2^n - 1)^n$. Нека множеството от тези матрици е наречено R_n . Видяхме, че $|R_n| = (2^n - 1)^n$.

Но някои матрици от R_n имат нулеви колонии, така че $|A_n| \neq |R_n|$. Ще премахнем от $(2^n - 1)^n$ броя на матриците с нулеви колонии съгласно принципа на включването и изключването. За всяко $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, нека $\phi(S)$ е броят на матриците от R_n , в които, ако $i \in S$, то колона i е нулева, за всяко $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Очевидно $\phi(\emptyset) = (2^n - 1)^n$, защото $S = \emptyset$ не налага никакви ограничения за задължително нулеви колонии, така че множеството от матриците е R_n .

Да разгледаме възможността $S = \{1\}$. Ограничението е, първата колона да нулева. Тогава $\phi(S)$ е броят на матриците от R_n , в които първата колона е само от нули. Но това означава, че има $2^{n-1} - 1$ възможности

за всеки ред. Тогава $\phi(S) = (2^{n-1} - 1)^n$. Ако $S = \{2\}$, пак $\phi(S) = (2^{n-1} - 1)^n$. И изобщо, за всяко конкретно едноелементно S е вярно, че $\phi(S) = (2^{n-1} - 1)^n$.

Продължаваме по същия начин. Ако $|S| = 2$, то $\phi(S) = (2^{n-2} - 1)^n$. Ако $|S| = 3$, то $\phi(S) = (2^{n-3} - 1)^n$. И изобщо, ако $|S| = k$, то $\phi(S) = (2^{n-k} - 1)^n$, като k се мени от 0 до n и тези граници са точни.

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|A_n| = \phi(\emptyset) - \sum_{|S|=1} \phi(S) + \sum_{|S|=2} \phi(S) - \sum_{|S|=3} \phi(S) + \cdots + (-1)^n \sum_{|S|=n} \phi(S)$$

Накратко,

$$|A_n| = \sum_{|S|=k} (-1)^k \phi(S)$$

Предвид тези два факта:

- ако $|S| = k$, то $\phi(S) = (2^{n-k} - 1)^n$,
- има $\binom{n}{k}$ начина да изберем кои k колони да са нулеви,

имаме право да кажем, че

$$|A_n| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^n$$

Но това е точно (2).

И една финална забележка. Ако $k = n$, то $(2^{n-k} - 1)^n = (2^{n-n} - 1)^n = (2^0 - 1)^n = (1 - 1)^n = 0^n = 0$. Ерго, последното събираемо в (2) е нула, така че спокойно можем да сложим горна граница $n - 1$ за индексната променлива:

$$|A_n| = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^n$$

Този израз дава (маргинално) по-бърз алгоритъм за пресмятането на $|A_n|$, но (2) е по-удобен за възприемане от човек.

Зад. 3 Нека A , B и C са множества. Докажете или опровергайте следните твърдения.

А) $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \rightarrow A \subseteq B \cap C$.

Б) $2^{A \cup B} \subseteq 2^A \cup 2^B$.

В) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$.

Г) $A \subseteq B \rightarrow 2^A \subseteq 2^B$.

Решение: А) е вярно. Ако A е празното множество, то A е подмножество на всяко множество и импликацията е тривиално вярна. Нека A е непразно. Разглеждаме произволен $x \in A$. Ако $A \subseteq B \wedge A \subseteq C$, то $x \in B \wedge x \in C$. По дефиниция, това е същото като $x \in B \cap C$.

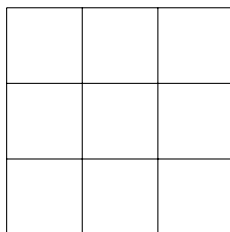
Б) не е вярно. Ето контрапример. Нека $A = \{a, b\}$ и $B = \{1, 2\}$. Тогава $A \cup B = \{a, b, 1, 2\}$. Веднага се вижда, че $2^{A \cup B}$ съдържа като елемент множеството $\{a, b, 1, 2\}$. От друга страна, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ и $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, така че $2^A \cup 2^B = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Виждаме, че $\{a, b, 1, 2\}$ е елемент на $2^{A \cup B}$, но не е елемент на $2^A \cup 2^B$. Заклучаваме, че $2^{A \cup B} \not\subseteq 2^A \cup 2^B$.

В) е вярно. Първо ще покажем, че $2^{A \cap B} \subseteq 2^A \cap 2^B$. Разглеждаме произволен елемент $X \in 2^{A \cap B}$. Ще покажем, че $X \in 2^A \cap 2^B$. Щом $X \in 2^{A \cap B}$, X е подмножество на $A \cap B$. Тогава всеки е елемент на X е елемент на $A \cap B$. Тогава всеки елемент на X е елемент на A и всеки елемент на X е елемент на B . Ерго, $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$. Това е същото като $X \in 2^A$ и $X \in 2^B$. По дефиницията на сечение, $X \in 2^A \cap 2^B$.

Сега ще покажем, че $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A \cap B}$. Разглеждаме произволен елемент $X \in 2^A \cap 2^B$. Ще покажем, че $X \in 2^{A \cap B}$. Щом $X \in 2^A \cap 2^B$, $X \in 2^A$ и $X \in 2^B$. Тогава $X \subseteq A$ и $X \subseteq B$. Тогава всеки елемент на X е елемент и на A , и на B . Тогава $X \subseteq A \cap B$. Следователно, $X \in 2^{A \cap B}$.

Г) е вярно. Разглеждаме произволен елемент $X \in 2^A$. Но това е същото като $X \subseteq A$. Тъй като $A \subseteq B$, в сила е $X \subseteq B$, откъдето $X \in 2^B$. Заклучаваме, че $2^A \subseteq 2^B$.

Зад. 4 Даден е квадрат 3×3 , разбит на девет квадратчета 1×1 ето така:



Във всяко от деветте квадратчета е записано точно едно число от $\{-1, 0, 1\}$. Разгледайте сумите по редове, сумите по колони и сумите по големите диагонали. Докажете, че поне две от тези суми са равни.

Решение: Тъй като всеки от обектите ред, колона, голям диагонал има три квадратчета, възможните стойности за неговата сума са от $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Но това множество има седем елемента, а обектите са осем. По принципа на Дирихле, има два обекта с една и съща сума. □

Зад. 5 Нека A , B и C са множества. Нека $R_3 \subseteq A \times B$, $R_1 \subseteq B \times C$ и $R_2 \subseteq B \times C$ са релации. Докажете или опровергайте, че

$$(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$

Решение: Твърдението е вярно. Ще докажем, че

$$\forall (x, z) \in A \times C : (x, z) \in (R_1 \cup R_2) \circ R_3 \leftrightarrow (x, z) \in (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$$

Наистина,

$$\begin{aligned} (x, z) \in (R_1 \cup R_2) \circ R_3 &\leftrightarrow // \text{ дефиниция на композиция на релации} \\ \exists y \in B ((x, y) \in R_3 \wedge (y, z) \in (R_1 \cup R_2)) &\leftrightarrow // \text{ дефиниция на обединение на множества} \\ \exists y \in B ((x, y) \in R_3 \wedge ((y, z) \in R_1 \vee (y, z) \in R_2)) &\leftrightarrow // \text{ дистрибутивност на конюнкция върху дизюнкция} \\ \exists y \in B ((x, y) \in R_3 \wedge (y, z) \in R_1) \vee ((x, y) \in R_3 \wedge (y, z) \in R_2) &\leftrightarrow // \text{ екзист. квантор дистрибутив. върху диз.} \\ \exists y \in B ((x, y) \in R_3 \wedge (y, z) \in R_1) \vee \exists y \in B ((x, y) \in R_3 \wedge (y, z) \in R_2) &\leftrightarrow // \text{ деф. на композиция} \\ (x, z) \in R_1 \circ R_3 \vee (x, z) \in R_2 \circ R_3 & // \text{ дефиниция на обединение на множества} \\ (x, z) \in (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3) \end{aligned}$$

Кое и трябваше да покажем. □

Зад. 6 На лекции разгледахме числата на Стирлинг от втори род. Числото на Стирлинг от втори род $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ е броят на начините да бъде разбито n -елементно множество на точно k дяла.

А) Докажете с комбинаторни разсъждения, че ако $n, k \in \mathbb{N}^+$, то

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$$

Б) Нека x е реална променлива. Докажете по индукция, че за всяко $n \in \mathbb{N}^+$:

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}$$

където нотацията $x^{\underline{k}}$ е кратък запис за $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$.

Решение на А): Нека A е непразно множество и $|A| = n$. Фиксираме произволен $a \in A$.

- Да преброим разбиванията на A на k дяла, такива че има дял $\{a\}$. Очевидно, тези разбивания съответстват биективно на разбиванията на $A \setminus \{a\}$ на точно $k-1$ дяла. Последните са $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$, така че разбиванията на A на k дяла, такива че има дял $\{a\}$, са $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$.
- Да преброим разбиванията на A на k дяла, такива че няма дял $\{a\}$, тоест, a е в дял с други елементи. Всяко такова разбиване се получава от едно разбиване на $A \setminus \{a\}$ на точно k дяла, последвано от добавяне на a в някой от дяловете. Тези разбивания на $A \setminus \{a\}$ са $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$. Тъй като има k възможности за поставяне на a в дял, разбиванията на A на k дяла, такива че няма дял $\{a\}$, са $k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Следва, че броят на разбиванията на A на k дяла е $k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$. Това е и край на доказателството на тъждеството в **А**).

Решение на Б): Твърди се, че за всяко $n \in \mathbb{N}^+$ е в сила

$$x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}} \quad (3)$$

Ще го докажем по индукция по n . Базовият случай е $n = 1$. Лявата страна е $x^1 = x$. Дясната страна е $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{1}}$. Очевидно $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$, а $x^{\underline{1}} = x$, така че и дясната страна е x . ✓

Индуктивното предположение е, че за някое цяло положително $n-1$:

$$x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}$$

В индуктивната стъпка ще докажем (3). Наистина

$$\begin{aligned} x^n &= x \cdot x^{n-1} = \quad // \text{ съгласно индуктивното предположение} \\ x \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}} &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x \cdot x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} (x - k + k) \cdot x^{\underline{k}} = \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} (x - k) \cdot x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} k \cdot x^{\underline{k}} \right) &= \\ \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)(x-k) + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \cdot x^{\underline{k}} &= \\ \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k+1}}}_A + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} \cdot x^{\underline{k}}}_B & \quad (4) \end{aligned}$$

Да разгледаме поотделно двете суми А и В в (4). Първо ще разгледаме А:

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} x^{k+1} = \sum_{k+1=2}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k+1-1 \end{matrix} \right\} x^{k+1} = \sum_{k=2}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k = 0 + \sum_{k=2}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k$$

Според текущите допускания, $n-1$ е положително. При това положение, очевидно $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$, понеже има нула начина да разбием непразно множество на нула дяла. Това ни дава право да напишем

$$A = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \sum_{k=2}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ 1-1 \end{matrix} \right\} + \sum_{k=2}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k$$

Сега да разгледаме В:

$$B = \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^k = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^k$$

Очевидно $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix} \right\} = 0$, понеже има нула начина да разбием $(n-1)$ -елементно множество на n дяла. Тогава $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix} \right\} x^n = 0$. Това ни дава право да напишем

$$B = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ n \end{matrix} \right\} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^k = \sum_{k=1}^n k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^k$$

Заместваме А и В в (4) и получаваме

$$\begin{aligned} x^n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k + \sum_{k=1}^n k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^k = \sum_{k=1}^n \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} x^k + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \cdot x^k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) x^k = \quad // \text{ съгласно тъждеството от } \mathbf{A}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \end{aligned}$$

Но това е точно (3). □