

Задача 1: Докажете по два начина, че за всяко цяло положително n е в сила

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 \quad (1)$$

А) Докажете твърдеството с комбинаторни разсъждения.

Б) Докажете твърдеството с решаване на рекурентно уравнение.

Решение: А) Доказателство с комбинаторни разсъждения може да се направи така. Нека n е произволно цяло положително число. Нека $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Дефинираме множествата S и T така:

$$S = \{(B, k) : B \subseteq A \wedge k \in A\} \quad (2)$$

$$T = S \setminus \{(B, k) \in S : B \cap \{k, k+1, \dots, n\} = \emptyset\} \quad (3)$$

На прост български, T е множеството от всички наредени двойки от подмножество на A и число от A , такива че в подмножеството се среща елемент, по-голям или равен на числото. Щом в подмножеството има някакъв елемент, то то е непразно.

Ще докажем, че лявата страна на (1) е равна на $|T|$. Нека $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ е следното разбиване на T :

$$\forall k \in A : T_k = \{(B, i) \in T \mid \max B = k\}$$

На прост български: T е колекция от наредени двойки (непразно множество, число) и ние разбиваме по максималния елемент на множеството.

Да видим колко е $|T_k|$, за произволно $k \in A$.

- Първите елементи на елементите на T_k са подмножества с максимален елемент k . Има точно 2^{k-1} начина да изберем останалите елементи, защото те съставляват произволно, може дори и празно, подмножество на $\{1, 2, \dots, k-1\}$.
- Вторите елементи на елементите на T_k са числа. За всяко такова число има k възможности.

Заклучаваме, че $|T_k| = k2^{k-1}$. Като малък пример, нека $n = 4$. Да разгледаме T_k за $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$T_1 = \{(\{1\}, 1)\}$$

$$T_2 = \{(\{2\}, 1), (\{1, 2\}, 1), (\{2\}, 2), (\{1, 2\}, 2)\}$$

$$T_3 = \{(\{3\}, 1), (\{1, 3\}, 1), (\{2, 3\}, 1), (\{1, 2, 3\}, 1), \\ (\{3\}, 2), (\{1, 3\}, 2), (\{2, 3\}, 2), (\{1, 2, 3\}, 2), \\ (\{3\}, 3), (\{1, 3\}, 3), (\{2, 3\}, 3), (\{1, 2, 3\}, 3)\}$$

$$T_4 = \{(\{4\}, 1), (\{1, 4\}, 1), (\{2, 4\}, 1), (\{3, 4\}, 1), (\{1, 2, 4\}, 1), (\{1, 3, 4\}, 1), (\{2, 3, 4\}, 1), (\{1, 2, 3, 4\}, 1), \\ (\{4\}, 2), (\{1, 4\}, 2), (\{2, 4\}, 2), (\{3, 4\}, 2), (\{1, 2, 4\}, 2), (\{1, 3, 4\}, 2), (\{2, 3, 4\}, 2), (\{1, 2, 3, 4\}, 2), \\ (\{4\}, 3), (\{1, 4\}, 3), (\{2, 4\}, 3), (\{3, 4\}, 3), (\{1, 2, 4\}, 3), (\{1, 3, 4\}, 3), (\{2, 3, 4\}, 3), (\{1, 2, 3, 4\}, 3), \\ (\{4\}, 4), (\{1, 4\}, 4), (\{2, 4\}, 4), (\{3, 4\}, 4), (\{1, 2, 4\}, 4), (\{1, 3, 4\}, 4), (\{2, 3, 4\}, 4), (\{1, 2, 3, 4\}, 4)\}$$

Наистина, $|T_1| = 1 \cdot 2^{1-1} = 1$, $|T_2| = 2 \cdot 2^{2-1} = 4$, $|T_3| = 3 \cdot 2^{3-1} = 12$ и $|T_4| = 4 \cdot 2^{4-1} = 32$. Както се вижда от примера, T_k не зависи от n , стига да е изпълнено $n \geq k$.

Съгласно комбинаторния принцип на разбиването,

$$|T| = \sum_{k=1}^n |T_k| = \sum_{k=1}^n k2^{k-1} \quad (4)$$

Наистина, $|T|$ е лявата страна на (1).

От друга страна, съгласно (3) и комбинаторния принцип на изваждането,

$$|T| = |S| - |\{(B, k) \in S : B \cap \{k, k+1, \dots, n\} = \emptyset\}|$$

Да изчислим $|\{(B, k) \in S : B \cap \{k, k+1, \dots, n\} = \emptyset\}|$. За всяко фиксирано $k \in A$, броят на наредените двойки (B, k) , в които B няма елементи от $\{k, k+1, \dots, n\}$ (с други думи, елементите са само от $\{1, 2, \dots, k-1\}$), е 2^{k-1} . Сумирайки по всички k от 1 до n , получаваме

$$|\{(B, k) \in S : B \cap \{k, k+1, \dots, n\} = \emptyset\}| = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Очевидно е, че $|S| = n2^n$. Това следва веднага от (2) и принципа на умножението. Тогава

$$|T| = n2^n - (2^n - 1) = (n-1)2^n + 1 \quad (5)$$

От (4) и (5) веднага получаваме (1). □

Б) Сега да докажем (1), решавайки рекурентно уравнение. Нека, за $n \geq 1$,

$$X(n) = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$$

Ако $n \geq 2$, имаме право да кажем, че

$$X(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k2^{k-1}$$

Тогава

$$X(n) - X(n-1) = n2^{n-1}$$

което е същото като

$$X(n) = X(n-1) + \frac{n}{2}2^n \quad (6)$$

Това е рекурентно уравнение, което е податливо на решаване с метода с характеристичното уравнение. Началното условие е

$$X(1) = 1 \cdot 2^0 = 1$$

Характеристичното уравнение е

$$x - 1 = 0$$

с мултимножество от корените $\{1\}_M$. От нехомогенната част имаме мултимножество $\{2, 2\}_M$, тъй като полиномът $\frac{1}{2}n$ е от първа степен. Обединението на мултимножествата е $\{1, 2, 2\}_M$. Оттук общото решение е

$$X(n) = C_1 1^n + C_2 2^n + C_3 n 2^n = C_1 + C_2 2^n + C_3 n 2^n$$

за някакви константи C_1, C_2, C_3 . Трябват ни още две начални условия, които са

$$X(2) = X(1) + \frac{2}{2}2^2 = 1 + 1 \cdot 4 = 5$$

$$X(3) = X(2) + \frac{3}{2}2^3 = 5 + 3 \cdot 4 = 17$$

Тогава

$$1 = C_1 + C_2 \cdot 2^1 + C_3 \cdot 1 \cdot 2^1 = C_1 + 2C_2 + 2C_3$$

$$5 = C_1 + C_2 \cdot 2^2 + C_3 \cdot 2 \cdot 2^2 = C_1 + 4C_2 + 8C_3$$

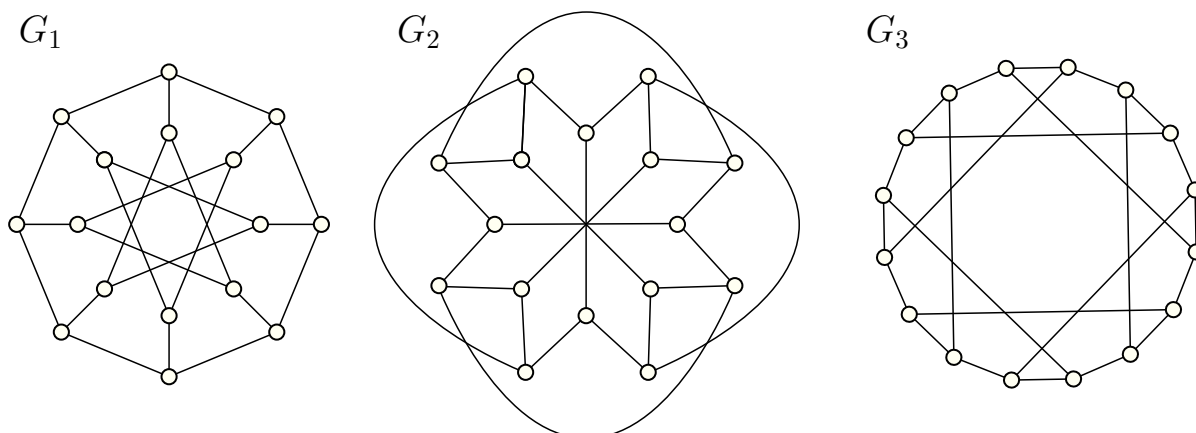
$$17 = C_1 + C_2 \cdot 2^3 + C_3 \cdot 3 \cdot 2^3 = C_1 + 8C_2 + 24C_3$$

Решението на системата от линейни уравнения е $(C_1, C_2, C_3) = (1, -1, 1)$, откъдето

$$X(n) = 1 - 2^n + n2^n = (n-1)2^n + 1$$

Коего и трябваше да покажем. □

Задача 2: Разгледайте рисунките на графите G_1 , G_2 и G_3 . Кой измежду G_1 , G_2 и G_3 са изоморфни и кои не са? Обосновете добре отговорите си.



Решение: G_1 и G_3 са изоморфни. Да дадем имена на техните върхове ето така:

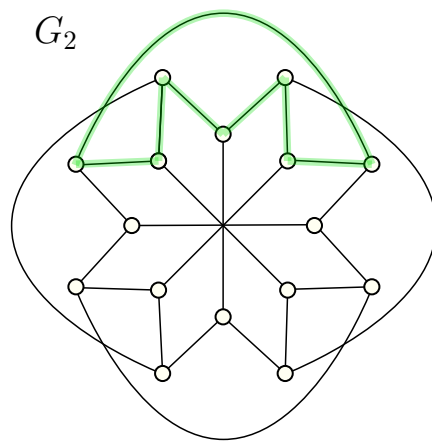


Изоморфизъм е биекцията $V(G_1) \rightarrow V(G_3)$, която изобразява връх на G_1 във връх на G_3 със същото име. Очевидно е, че $1, a, 2, b, 3, c, 4, d, 5, e, 6, f, 7, g, 8, h, 1$ е Хамилтонов цикъл и в G_1 , и в G_3 :



И в G_1 , и в G_3 , хордите на въпросния Хамилтонов цикъл са осемте ребра $(1, c)$, $(7, a)$, $(3, e)$, $(5, g)$, $(4, f)$, $(2, d)$, $(b, 8)$ и $(6, h)$. Кое то доказва, че G_1 и G_3 са изоморфни.

От друга страна, G_2 не е изоморфен нито на G_1 , нито на G_3 . За да се убедим в това, да забележим, че G_1 и G_3 са двуделни върхове: единият дял са буквите, а другият, числата. А G_2 не е двуделен, понеже има 7-цикъл:



□

Задача 3: Нека $m \in \mathbb{N}^+$. Разгледайте безкрайната редица $a_0, a_1, a_2, \dots$, дефинирана така:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ \sqrt{m + a_{n-1}}, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}$$

Докажете **по индукция**, че редицата е строго растяща. Докажете **по индукция**, че редицата е ограничена отгоре.

Решение: Ще докажем, че редицата е строго растяща. Нека, за $k \geq 0$, предикатът $P(k)$ е $\boxed{a_{k+1} > a_k}$. Ще докажем $\forall k \geq 0 : P(k)$, по индукция по k .

Базата е $k = 0$. Твърдението става $a_1 > a_0$. Но $a_0 = 0$ по дефиниция, а $a_1 = \sqrt{m + a_0} = \sqrt{m}$. Дали $\sqrt{m} > 0$? Със сигурност да, понеже m е цяло положително. Тогава $a_1 > a_0$. ✓

Индуктивното предположение е $P(k)$ за някое $k \geq 0$. Това е същото като $a_{k+1} > a_k$.

Ще докажем $P(k+1)$. Тоест, че $a_{k+2} > a_{k+1}$. Наистина, лявата страна е a_{k+2} , а $a_{k+2} = \sqrt{m + a_{k+1}}$ по дефиниция, щом $k+2 \geq 1$. Но $\sqrt{m + a_{k+1}} > \sqrt{m + a_k}$, което следва от индуктивното предположение $a_{k+1} > a_k$ и добре известния факт, че функцията корен втори е строго растяща. Тогава $a_{k+2} > \sqrt{m + a_k}$. Но $\sqrt{m + a_k}$ е точно a_{k+1} по дефиниция, щом $k+1 \geq 1$. Заключаваме, че $a_{k+2} > a_{k+1}$. ✓

Ще докажем, че редицата е ограничена отгоре. Това е същото като да докажем, че съществува число L , такова че $\forall k \geq 0 : a_k \leq L$. Избираме $L = 2m$. Ще докажем по индукция дори по-силно твърдение: $\forall k \geq 0 : a_k < 2m$.

Базата е $k = 0$. По дефиниция, $a_0 = 0$. Наистина, $0 < 2m$, понеже m е цяло положително. ✓

Индуктивното предположение е, че за някое естествено k е изпълнено $a_k < 2m$.

Ще докажем, че $a_{k+1} < 2m$. От индуктивното предположение знаем, че $a_k < 2m$. Тогава $a_k + m < 3m$. Тогава $\sqrt{a_k + m} < \sqrt{3m}$. Но $a_{k+1} = \sqrt{a_k + m}$ по дефиниция, щом $k+1 \geq 1$. Тогава $a_{k+1} < \sqrt{3m}$. Но $\sqrt{3m} < \sqrt{4m}$, понеже функцията корен втори е строго растяща. Тогава $a_{k+1} < \sqrt{4m}$, което е същото като $a_{k+1} < 2\sqrt{m}$. Но $2\sqrt{m} < 2m$, понеже функцията корен втори е строго растяща. Тогава $a_{k+1} < 2m$. Което и трябваше да покажем. □

Задача 4: Докажете, че за всеки 16 на брой, две по две различни цели положителни числа, по-малки от 101, съществуват четири от тях, да ги наречем x, y, w, z , такива че $x + y = w + z$.

Решение: Естествено е да опитаме да приложим принципа на Дирихле. При фиксирани 16 числа има общо $\binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ суми, не непременно различни, на двойки числа от шестнадесетте. При положение, че сумандите са различни, най-малката възможна сума е $1+2 = 3$, а най-голямата възможна сума е $99 + 100 = 199$. Оттук имаме 120 ябълки (суми) в $199 - 3 + 1 = 197$ чекмеджета. Не можем да приложим принципа на Дирихле по този начин.

Задачата ще бъде решена с принципа на Дирихле, но прилагането му е триково (неочевидно). Нека числата са $x_1, \dots, x_{16}$. БОО, нека $x_1 < x_2 < \dots < x_{16}$. Ще разглеждаме наредени двойки (x_i, x_j) , където $i, j \in \{1, 2, \dots, 16\}$ и $i \neq j$. За удобство допускаме, че за всяка наредена двойка (x_i, x_j) е в сила $i > j$. Това ни позволява да смятаме, че разликата $x_i - x_j$ е положителна.

Минималната положителна разлика на ляв минус десен елемент на наредена двойка е 1, а максималната е 99. При положение, че двойките (x_i, x_j) са $\binom{16}{2} = 120$, дали имаме директно решение с принципа на Дирихле, понеже наредените двойки са повече от разликите? Отговорът е “не”, поне не директно.

По-подробно: да допуснем, че съществуват две различни наредени двойки (x_i, x_j) и (x_k, x_ℓ) , такива че

$$x_i - x_j = x_k - x_\ell \quad (7)$$

Дали x_i, x_j, x_k и x_ℓ са решение, понеже (7) е същото като $x_i + x_\ell = x_j + x_k$? Не непременно! В условието се иска четирите числа да са **две по две различни**, а (7) позволява следните ситуации.

- $x_j = x_k$. В такъв случай x_i, x_j, x_k и x_ℓ не са решение. Примерно, нека $x_i = 48, x_j = 44, x_k = 44$ и $x_\ell = 40$. Вярно е, че $x_i - x_j = x_k - x_\ell$, понеже $48 - 44 = 44 - 40$, но нямаме решение заради повтарянето на 44.
- $x_i = x_\ell$. Тази ситуация е практически същата като горната, със същия извод: x_i, x_j, x_k и x_ℓ не са решение.

Забележете, че е невъзможно хем $x_i = x_\ell$, хем $x_j = x_k$, понеже тогава (7) става $x_i - x_j = x_j - x_i$, което е невъзможно. Също така е невъзможно $x_i = x_k$, защото тогава (x_i, x_j) и (x_k, x_ℓ) биха били една и съща наредена двойка, предвид (7). По същата причина е невъзможно $x_j = x_\ell$.

И така, по отношение на (7), единствените възможности за равенство на числа измежду x_i, x_j, x_k и x_ℓ са тези: или $x_j = x_k$, или $x_i = x_\ell$. По същество, те са едно и също нещо: положителният суманд от едната страна е равен по абсолютна стойност на отрицателния суманд от другата страна. Дефинираме, че числото x_j е *неблагоприятно* за наредените двойки (x_i, x_j) и (x_j, x_k) . Това е същото като $x_i - x_j = x_j - x_k$, което е същото като $2x_j = x_i + x_k$. Дефинираме, че наредените двойки (x_i, x_j) и (x_j, x_k) са *лоши една за друга*.

Ключовото наблюдение е, че ако x_j е неблагоприятно за две различни двойки от наредени двойки, то имаме решение. По-подробно, ако има две лоши една за друга наредени двойки (x_i, x_j) и (x_j, x_k) и още две лоши една за друга наредени двойки (x_t, x_j) и (x_j, x_s) , такива че i, k, s и t са два по два различни индекси, то

$$2x_j = x_i + x_k$$

$$2x_j = x_t + x_s$$

откъдето $x_i + x_j = x_t + x_s$, където събираемите са две по две различни. И това е решение.

Да разгледаме ситуацията, в която всяко $x_i, 1 \leq i \leq 16$, е неблагоприятно за най-много една двойка от различни наредени двойки. Във всяка от тези двойки от наредени двойки, игнорираме едната от тях. Остават поне $120 - 16 = 104$ наредени двойки, като във всяка от тях разликата е между 1 и 99. По принципа на Дирихле, има две наредени двойки с една и съща разлика. Нито две от тези наредени двойки не са лоши една за друга. Заклучаваме, че всяка двойка от наредени двойки с една и съща разлика дава решение. $\square$

Задача 5: Граф, който е изоморфен на допълнението си, се нарича *самодопълнителен*. Докажете, че ако $G = (V, E)$ е самодопълнителен и $|V|$ е нечетно, то в G има връх от степен $\frac{n-1}{2}$.

Решение: Нека $G = (V, E)$ е самодопълнителен и n е нечетно. Нека $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. БОО, нека $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \dots \leq d(v_n)$. Помним, че редицата от степените на граф е редицата от степените на неговите върхове в намаляващ ред. Тогава редицата от степените на G е

$$d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n) \quad (8)$$

Нека $\bar{d}(v_i)$ е степенята на v_i в $\bar{G}$, за $1 \leq i \leq n$. Лесно се вижда, че $\bar{d}(v_i) = n - 1 - d(v_i)$, за $1 \leq i \leq n$.

Да разгледаме редицата от степените на $\bar{G}$. Тя също е в намаляващ ред, така че е

$$\bar{d}(v_n), \bar{d}(v_{n-1}), \dots, \bar{d}(v_1) = n - 1 - d(v_n), n - 1 - d(v_{n-1}), \dots, n - 1 - d(v_1) \quad (9)$$

Ключовото наблюдение е, че редиците от степените на изоморфни графи са едни и същи. Но G и $\bar{G}$ са изоморфни по конструкция. Тогава редиците (8) и (9) са едни и същи. По условие, n е нечетно. Нека $n = 2k + 1$. И в двете редици има един среден елемент, а именно $d(v_{k+1})$ в (8) и $\bar{d}(v_{k+1}) = n - 1 - d(v_{k+1})$ в (9). Тъй като редиците съвпадат, в сила е $d(v_{k+1}) = n - 1 - d(v_{k+1})$. Тогава $2d(v_{k+1}) = n - 1$, откъдето $d(v_{k+1}) = \frac{n-1}{2}$. $\square$