

ЗАДАЧИ ПО БУЛЕВИ ФУНКЦИИ.

Задача 1. Намерете $|\mathcal{F}^n|$.

Решение: Добре известно е, че броят на тоталните функции с краен домейн X и краен кодомейн Y е $|Y|^{|X|}$. Прилагаме тази формула с $|X| = 2^n$ и $|Y| = 2$ и получаваме $|\mathcal{F}^n| = 2^{2^n}$. $\square$

Задача 2. Нека

$$S = \{f \in \mathcal{F}^n \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \{0, 1\}^n : \mathbf{w} = \bar{\mathbf{z}} \rightarrow f(\mathbf{w}) = \overline{f(\mathbf{z})}\}$$

Намерете $|S|$ (като функция на n , разбира се).

Решение: С други думи, търси се броят на булевите функции, които върху противоположни вектори имат противоположни стойности[†].

Да групираме n -векторите по двойки $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, такива че $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}}$. За всяка функция $f \in X$ и за всяка от тези двойки е изпълнено следното. Стойността на функцията върху единия елемент от двойката се определя от стойността на функцията върху другия елемент от двойката. Иначе казано, стойностите, които функцията има върху *половината* от n -векторите, я определят напълно.

Но n -векторите са 2^n , така че половината от тях са $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ на брой. Имайки предвид това, виждаме, че броят на въпросните функции е равен на броя на всички булеви функции върху $n - 1$ променливи. Отговорът е $|S| = 2^{2^{n-1}}$. $\square$

Задача 3. Нека

$$X = \{f \in \mathcal{F}^n \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \{0, 1\}^n : \mathbf{w} = \bar{\mathbf{z}} \rightarrow f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{z})\}$$

Намерете $|X|$.

Решение: В тази задача се търси броят на функциите, които имат една и съща стойност върху противоположни вектори. Отговорът е $|X| = 2^{2^{n-1}}$ със практически същите съображения като в решението на Задача 2. $\square$

Задача 4. Намерете броя на булевите функции на n променливи, които имат стойност 1 върху точно k вектора.

Решение: Отговорът очевидно е $\binom{2^n}{k}$. $\square$

Задача 5. Да се намери броят на симетричните булеви функции на n променливи.

[†]Такива функции се наричат *самодвойствени* (на английски *self-dual*). Просто *двойствена* функция на $f \in \mathcal{F}^n$ е единствената $g \in \mathcal{F}^n$, за която е изпълнено $\forall \mathbf{a} \in \{0, 1\}^n : g(\mathbf{a}) = f(\bar{\mathbf{a}})$. Самодвойствените функции са тези, които са двойствени на себе си.

Решение: Съгласно определението на симетрична функция, става дума за булеви функции, които запазват стойността си при произволно размятане на стойностите на елементите на входния вектор. Входният вектор се състои от нули и единици, следователно се иска върху всички входни вектори **с един и същи брой единици**, стойността на функцията да е една и съща. С други думи, иска се върху всеки слой на хиперкуба функцията да има една и съща стойност. Слоевеите на n -мерния хиперкуб са $n + 1$, върху всеки от тях стойността е една и съща, а стойностите върху различни слоеве са произволни една спрямо друга. Тогава отговорът е 2^{n+1} . $\square$

Задача 6. Кои са симетричните булеви функции на 2 променливи?

Решение: С други думи, кои са комутативните функции, тъй като при $n = 2$, свойството симетричност съвпада със свойството комутативност. Съгласно Задача 5, тези функции са $2^{2+1} = 8$ на брой. В каноничното представяне, това са функциите

$$f_0 = 0000$$

$$f_1 = 0001$$

$$f_6 = 0110$$

$$f_7 = 0111$$

$$f_8 = 1000$$

$$f_9 = 1001$$

$$f_{14} = 1110$$

$$f_{15} = 1111$$

$\square$

Задача 7. Да се определи броят на булевите функции на n променливи за $n \geq 2$, които запазват стойността си при размяна на променливите x_1 и x_2 .

Решение: С други думи, иска се

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

за всички възможни стойности на $x_1, \dots, x_n$. Решението ще получим след като съобразим колко различни входни вектори има по отношение на тази задача.

Лесно се вижда, че ако $x_1 = x_2 = 0$ или $x_1 = x_2 = 1$, разместването на x_1 и x_2 няма значение и функцията запазва стойността си по очевидни причини при разместването на x_1 и x_2 . Да разбием множеството от всички входни вектори на 4 равномошни подмножества съгласно четирите възможности за подвектора x_1x_2 :

$$A = 0 \times 0 \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n-2 \text{ множителя}}$$

$$B = 0 \times 1 \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n-2 \text{ множителя}}$$

$$C = 1 \times 0 \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n-2 \text{ множителя}}$$

$$D = 1 \times 1 \times \underbrace{\{0, 1\} \times \dots \times \{0, 1\}}_{n-2 \text{ множителя}}$$

Всяко от тези множества има мощност 2^{n-2} . Да разгледаме булевите функции на n променливи без ограничения. Всяка булева функция на n променливи без ограничения има 2^{n-2} стойности върху векторите от A , върху векторите от B , върху векторите от C и върху векторите от D . Всички тези стойности на функцията, на брой $4 \times 2^{n-2} = 2^n$ може да са единици или нули независимо една от друга, откъдето и броят на всички функции е $= 2^{2^n}$.

Ако имаме предвид ограничението от условието на задачата, виждаме, че върху всеки вектор от C , стойността на функцията трябва да съвпада със стойността ѝ върху точно един вектор от B . От друга страна, върху векторите от A стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества. Аналогично, върху векторите от D стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества.

За да получим броя на търсените функции, достатъчно е да игнорираме едно от множествата B и C , да кажем, че игнорираме C , и да разглеждаме само A , B и D . За всеки вектор $z \in A \cup B \cup D$, стойността на функцията е независима от стойността ѝ върху кой да е друг вектор $z' \in A \cup B \cup D$. Тогава отговорът е

$$2^{2^{|A|+|B|+|D|}} = 2^{3 \times 2^{n-2}}$$

Ако заместим $n = 2$, получаваме 2^3 , което точно съвпада с отговора на Задача 6. $\square$

Задача 8. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни входни вектори.

Решение: Отговорът очевидно е $= 2^{2^n} - |A|$, където A е множеството от булевите функции на n променливи, които не приемат стойност 1 върху някои два противоположни вектора. С други думи, за всеки входен вектор a и за всяка функция $f \in A$ е изпълнено:

$$(f(a) = 0 \wedge f(\bar{a}) = 0) \vee \quad (1)$$

$$(f(a) = 0 \wedge f(\bar{a}) = 1) \vee \quad (2)$$

$$(f(a) = 1 \wedge f(\bar{a}) = 0) \quad (3)$$

Двойките противоположни вектори на брой са $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. За всяка такава двойка показахме, че възможностите са точно 3 (за да може функцията да бъде от A). И така, $|A| = 3^{2^{n-1}}$. Отговорът тогава е

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} \quad (4)$$

Тук може да възникне следното питане. Щом $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$ е мощността на непразно множество, то очевидно това е положително число за всяко n . Ако обаче не знаем комбинаторните съображения, довели до отговора, а просто видим $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$, може да се запитаем, това не може ли да е отрицателно за някакви n . С помощта на математическия анализ можем да докажем, че не може да е отрицателно при неограничено нарастване на n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{3^{2^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{(\log_2 3)2^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2^n - (\log_2 3)2^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2 - \log_2 3)2^{n-1}} = \infty$$

понеже $2 > \log_2 3$.

Следното доказателство на същото твърдение е на Добромир Кралчев:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = 2^{2 \times 2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} > 0$$

Тази задача може да се реши и с други съображения. Нека B е подмножеството на $\mathcal{F}^n$ от функциите, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни вектори. Ние търсим $|B|$. Нека B_k за $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ е подмножеството от тези функции, които приемат стойност 1 върху точно k двойки противоположни вектори. Очевидно B се разбива на $B_1, \dots, B_{2^{n-1}}$, така че

$$|B| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |B_k|$$

Лесно се вижда, че

$$|B_k| = \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

Съображенията са следните: по $\binom{2^{n-1}}{k}$ начина можем да изберем от всички 2^{n-1} двойки противоположни вектори такива, върху които функцията да има стойност 1, а за всяка от останалите $2^{n-1} - k$ двойки вектори имаме точно 3 възможности (виж (1)), така щото функцията да няма стойност 1 върху двата елемента на двойката. И така, отговорът е:

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)} \quad (5)$$

От (4) и (5) извеждаме (с комбинаторни разсъждения) тъждеството:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

□

Задача 9. За колко булеви функции f на n променливи е изпълнено следното: ако $f(\mathbf{a})$ има стойност 1, то f има стойност 1 върху всеки вектор, който има поне толкова единици, колкото $\mathbf{a}$?

Решение: С други думи, ако f има стойност 1 върху някакъв вектор $\mathbf{a}$, то f има стойност 1 върху всички вектори от слоя на хиперкуба, към който слой принадлежи $\mathbf{a}$, и освен това f има стойност 1 върху всички вектори от всички следващи слоеве. Веднага се вижда, че всяка такава функция има една и съща стойност върху всеки слой на хиперкуба и се определя еднозначно от това, къде е “границата” между нулите и единиците върху хиперкуба. По-подробно казано, върху някакви последователни слоеве на хиперкуба (може и да няма такива), започвайки от слой 0, функцията има стойност само 0, и после върху всички останали слоеве (може и да няма такива), функцията има стойност само 1. Тъй като слоевете са $n+1$, то има точно $n+2$ такива функции. □

Задача 10. За колко булеви функции f на n променливи е изпълнено следното: ако $f(\mathbf{a})$ има стойност 1, то f има стойност 1 върху всеки вектор, който има повече единици от $\mathbf{a}$?

Решение: Задачата е подобна на Задача 9, но само донякъде. В Задача 10:

- или има някакъв “граничен слой” в хиперкуба, нека да е слой k , в който за първи път се появява стойност на функцията 1, като върху всички слоеве с по-малък номер функцията е задължително 0, а върху всички слоеве с по-голям номер функцията е задължително 1,
- или такъв граничен слой няма, тоест изобщо няма единици, тоест функцията е константа-нула[†].

Първо да сметнем колко са функциите от търсения вид, които имат поне една единица (с други думи, не са константа-нула). Числото k (номерът на граничния слой) може да е най-малко 0 и най-много n . Тъй като в слоеве с номера 0, $\dots$, $k-1$ и $k+1$, $\dots$, n нещата са фиксирани, единственото, което варира, е как точно са “раздадени” нулите и единиците в слой k по такъв начин, че да има поне една единица.

Знаем, че слой k има мощност $\binom{n}{k}$. Всички начини да “раздадем” нули и единици на неговите елементи са $2^{\binom{n}{k}}$ на брой. От това число вадим единица, за да отразим факта, че върху поне един вектор от слой k функцията е единица (с други думи, изваждаме от разглеждането раздаването само на нули). И така, за дадено k , броят на начините функцията да има поне една единица върху векторите на слой k е $2^{\binom{n}{k}} - 1$. А отговорът, съгласно принципа на разбиването, е:

$$\sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) = \sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n - 1 \quad (6)$$

Към (6) добавяме единица, защото функцията може да е константа-нула, и получаваме

$$\sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n$$

□

Задача 11. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които нямат фиктивни променливи.

Решение: Нека $\mathbf{G}^n$ е множеството от булевите функции на n променливи, които нямат фиктивна променлива. Нека $\mathbf{H}^n$ е множеството на булевите функции на n променливи, които имат поне една фиктивна променлива. Очевидно $|\mathbf{G}^n| + |\mathbf{H}^n| = 2^{2^n}$, съгласно комбинаторния принцип на разбиването, така че

$$|\mathbf{G}^n| = 2^{2^n} - |\mathbf{H}^n|$$

Ако променливите са $x_1, \dots, x_n$, нека $\mathbf{H}^n(i_1, \dots, i_k)$ означава множеството от булевите функции, в които променливи $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ са гарантирано фиктивни (може да има и други фиктивни, но тези със сигурност са фиктивни), където $k \in \{1, \dots, n\}$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

[†]Благодарности на Добромир Кралчев за посочването на това!

Да разгледаме променливата x_1 . В колко функции тя е фиктивна? Може да има и други фиктивни променливи, може и да няма – пита се, за колко функции е изпълнено x_1 да е фиктивна? От дефиницията на фиктивна променлива имаме изискването за всяка от тези функции, да кажем f , да е изпълнено:

$$f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Ако си представим входните вектори, наредени лексикографски отгоре надолу, иска се функцията (която е колона с височина 2^n) да е такава, че горната половина на колоната да е точно като долната половина. Ето пример за функция на три променливи, в която x_1 е фиктивна:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Виждаме, че за да бъде x_1 фиктивна, стойността на функцията върху половината вектори определя стойността ѝ върху другата половина. Броят на функциите, в които x_1 е фиктивна, е $2^{2^{n-1}}$. Същото е в сила и за всяка друга променлива, но за другите променливи половините вектори не са горната и долната; за x_2 , например, колоната от стойности върху първата и третата четвъртини трябва да е същата като колоната от стойности върху втората и четвъртата четвъртини, и така нататък.

Всяка променлива на функцията може да е фиктивна. Но $|H^n|$ не е $n \times 2^{2^{n-1}}$, тъй като този израз брои някои функции по няколко пъти. Забележете, че има функции с повече от една фиктивна променлива. Ето пример за функция, в която и x_1 , и x_2 са фиктивни:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

От $n \times 2^{2^{n-1}}$ ще изваждаме по принципа на включването и изключването: ще намерим колко са функциите, в които две променливи са гарантирано фиктивни, в колко три променливи са гарантирано фиктивни, и така нататък, в колко функции всички n са фиктивни, и ще построим израз с алтерниращи положителни и отрицателни знаци съгласно принципа на включването и изключването. И така:

$$|H^n| = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |H^n(i_1)| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |H^n(i_1, i_2)| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |H^n(i_1, i_2, i_3)| - \dots + (-1)^{n-1} |H^n(i_1, \dots, i_n)|$$

Както вече видяхме, $\sum_{1 \leq i_1 \leq n} |H^n(i_1)| = \binom{n}{1} 2^{2^{n-1}}$. Аналогично, $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |H^n(i_1, i_2)| = \binom{n}{2} 2^{2^{n-2}}$,

$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |\mathbf{H}^n(i_1, i_2, i_3)| = \binom{n}{3} 2^{2^{n-3}}$, и така нататък. Последното събираемо по абсолютна стойност е $|\mathbf{H}^n(i_1, \dots, i_n)| = |\mathbf{H}^n(1, \dots, n)| = \binom{n}{n} 2^{2^{n-n}} = 1 \times 2^{2^0} = 2$.

И така, броят на функциите с поне една фиктивна променлива е:

$$|\mathbf{H}^n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

Тогава броят на функциите без фиктивни променливи е:

$$|\mathbf{G}^n| = 2^{2^n} - \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}} \quad \square$$

Задача 12. Напишете в явен вид всички булеви функции на три променливи $f(x, y, z)$, в които втората променлива y е фиктивна.

Решение: По определение, y е фиктивна тстк $f(x, 0, z) = f(x, 1, z)$ за стойности—а те са четири на брой—на булевия вектор xz . По-подробно казано, иска се

$$f(0, 0, 0) = f(0, 1, 0)$$

$$f(0, 0, 1) = f(0, 1, 1)$$

$$f(1, 0, 0) = f(1, 1, 0)$$

$$f(1, 0, 1) = f(1, 1, 1)$$

Очевидно има точно $2^4 = 16$ такива булеви функции и те са следните.

x	y	z	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Това са точно тези булеви вектори с дължина 8, в които на всяка двойка позиции измежду тези:

- първата и третата,
- втората и четвъртата,
- петата и седмата,
- шестата и осмата

има една и съща стойност. □

Задача 13. Дадени са булевите функции $f = 1011$ и $g = 1001$. Да се намери каноничното представяне на функцията $h(x_2, x_4, x_3) = f(g(x_4, x_3), x_2)$.

Решение: Имената на променливите са дадени по този начин за объркване. С просто преименуване получаваме еквивалентен израз $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$. Каквито и имена на променливи да ползваме, става дума за 3 променливи и таблицата на търсената функция трябва да има 8 реда:

x_1	x_2	x_3	$h(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

Това, че f и g са дадени без имена на променливите няма никакво значение. Очевидно $f(00) = 1$, $g(00) = 1$, $f(01) = 0$ и така нататък. Функцията h е дефинирана като $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$. Заместваме в таблицата:

x_1	x_2	x_3	$f(g(x_2, x_3), x_1)$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

Ще пресмятаме отвътре навън, тъй като тази функция е композиция на $g(x_2, x_3)$ на мястото на първата променлива на f . И така, да видим какви са стойностите на $g(x_2, x_3)$ в таблицата. Те са еднозначно определени, защото на всеки ред x_2 и x_3 си имат някакви стойности, а от каноничната дефиниция на g знаем какви са функционалните ѝ стойности върху всеки вход.

x_1	x_2	x_3	$g(x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Тук никъде не ползвахме най-лявата колона, защото g не зависеше от x_1 . В следващата стъпка от решението пък няма да ползваме колоните на x_2 и x_3 , защото f зависи непосредствено само от стойностите на g и от x_1 :

x_1	x_2	x_3	$g(x_2, x_3)$	$f(g(x_2, x_3), x_1)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

За да се убедим, че е така, да си припомним дефиницията $f = 1011$. Функцията f е нула тогава и само тогава, когато вхoдът е 01 . На горните четири реда $x_1 = 0$, а в израза $f(g(x_2, x_3), x_1)$, x_1 е втората променлива, така че на горните четири реда функцията е четири единици. На долните четири реда, $x_1 = 1$, така че функцията просто повтаря стойностите на $g(x_2, x_3)$. $\square$

Задача 14. Нека $f = 1000$ и $g = 0111$. Да се намери каноничната форма на функцията $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$.

Решение:

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2)$	$g(x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0

И така, $h = 0111\ 0000\ 0000\ 0000$. $\square$

Задача 15. Дадени са булеви функции $f(x, y, z) = 11100111$ и $g(x, y, w, z) = 0011000110100101$.

- Напишете булевата функция $g(f(x, y, x), f(x, y, y), x, y)$ в каноничен вид.
- Намерете нейната СъвДНФ.

Решение: Забележете, че g е функция на 4 аргумента, но $g(f(x, y, x), f(x, y, y), x, y)$ е функция на 2 променливи, наречени x и y . Да я наречем $q(x, y)$. Търси се каноничния запис на q като булев вектор от четири булеви стойности.

$f(x, y, x)$ е функция на две променливи. Да я наречем $u(x, y)$. $u(00) = f(000) = 1$. $u(01) = f(010) = 1$. $u(10) = f(101) = 1$. $u(11) = f(111) = 1$.

$f(x, y, y)$ също е функция на две променливи. Да я наречем $v(x, y)$. $v(00) = f(000) = 1$. $v(01) = f(011) = 0$. $v(10) = f(100) = 0$. $v(11) = f(111) = 1$.

Определихме напълно u и v . Търсената $g(f(x, y, x), f(x, y, y), x, y)$ е $q(u(x, y), v(x, y), x, y)$. $q(00) = g(u(00), v(00), 0, 0) = g(1100) = 0$. $q(01) = g(u(01), v(01), 0, 1) = g(1001) = 0$. $q(10) = g(u(10), v(10), 1, 0) = g(1010) = 1$. $q(11) = g(u(11), v(11), 1, 1) = g(1111) = 1$. Тогава q е булевата функция 0011. Нейната СъвДНФ е $x\bar{y} \vee xy$. $\square$

Задача 16. Дадени са следните функции чрез формули:

$$f(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$$

$$g(x, y, z) = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow y))$$

$$h(x, y, z) = (x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

Да се намерят каноничните представяния на функциите.

Отговор:

$$f(x, y, z) = 00010111$$

$$g(x, y, z) = 10010101$$

$$h(x, y, z) = 11111111$$

$\square$

Задача 17. Еквивалентни ли са следните две формули:

$$((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$$

$$x|y$$

Решение: Да, еквивалентни са. Ще решим задачата с табличния метод (таблиците не са показани). Първата формула е конюнкция от $\hat{1} = ((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))$ и $1110 = ((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$, която е очевидно 1110. А долната формула—чертата на Sheffer—е на функцията 1110 по дефиниция. $\square$

Задача 18. Докажете чрез еквивалентни преобразувания следните еквивалентности:

- $x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$.
- $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$.
- $\bar{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee ((y \rightarrow z)(z \rightarrow y))}$.

Разрешените еквивалентни преобразувания са всички свойства на булевите функции на две променливи, дадени в учебника, и освен това свойството на импликацията $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ и свойството на сумата по модул две $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, свойството на еквивалентността $x \equiv y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$, свойството на чертата на Sheffer $x|y = \bar{x}y$ и свойството на стрелката на Peirce $x \downarrow y = \bar{x} \vee \bar{y}$.

Решение: Ще покажем само последната еквивалентност, която е

$$\overline{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee \underbrace{(y \rightarrow z)(z \rightarrow y)}_A}$$

Да разгледаме израза $A = (y \rightarrow z)(z \rightarrow y)$. В сила е:

$$\begin{aligned} A &= (y \rightarrow z)(z \rightarrow y) \quad // \text{ свойство на импликацията} \\ &= (\overline{y} \vee z)(\overline{z} \vee y) \quad // \text{ дистрибутивност на конюнкцията над дизюнкцията} \\ &= \overline{y} \overline{z} \vee \underbrace{\overline{y} y}_0 \vee \underbrace{z \overline{z}}_0 \vee zy \\ &= yz \vee \overline{y} \overline{z} \end{aligned}$$

И така, дясната страна е еквивалентна на

$$\begin{aligned} \overline{x \vee yz \vee \overline{y} \overline{z}} &= \quad // \text{ De Morgan} \\ \overline{x} \overline{yz \vee \overline{y} \overline{z}} &= \quad // \text{ De Morgan} \\ \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{\overline{y} \vee \overline{z}}) &= \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z})(y \vee z) = \overline{x}(\overline{y} y \vee \overline{y} z \vee \overline{z} y \vee \overline{z} z) = \\ \overline{x}(\overline{y} z \vee \overline{z} y) &= \overline{x}(y \oplus z) \end{aligned}$$

□

Задача 19. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че x_1 е фиктивна променлива в следните функции:

- $f(x_1, x_2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2)$.
- $g(x_1, x_2) = (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1 | x_2)$.
- $h(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3)(\overline{x_3 \rightarrow x_2})$.

Решение:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2) = (x_2 \rightarrow x_1)(\overline{x_2} \vee \overline{x_2}) = (x_2 \rightarrow x_1)\overline{x_2} = \\ &(\overline{x_2} \vee x_1)\overline{x_2} = \overline{x_2} \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_2} = \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_2} = \overline{x_2}(1 \vee x_1) = \overline{x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1 | x_2) = (x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} x_2) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \\ &x_1 x_2 \vee \overline{x_1}(\overline{x_2} \vee 1) \vee \overline{x_2} = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} 1 \vee \overline{x_2} = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} = \\ &x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} = \quad // \text{ нека } x_1 x_2 = p \\ p \vee \overline{p} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3)(\overline{x_3 \rightarrow x_2}) = (\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3)(\overline{\overline{x_3} \vee x_2}) = \\ &(\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3)(\overline{\overline{x_3}} \overline{x_2}) = (\overline{x_1 \oplus x_2} \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = (\overline{x_1 \overline{x_2}} \vee \overline{\overline{x_1} x_2} \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = \\ &((\overline{x_1} \overline{x_2} \vee \overline{\overline{x_1} x_2}) \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = ((\overline{x_1} \vee \overline{\overline{x_2}})(\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_2}) \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = \\ &((\overline{x_1} \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x_2}) \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = ((\overline{x_1} x_1 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_2 x_1 \vee x_2 \overline{x_2}) \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = \\ &((\overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_2 x_1) \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = (\overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_2 x_1 \vee x_3)\overline{x_2} x_3 = \\ &\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_2} x_3 \vee x_2 x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_3 \overline{x_2} x_3 = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee 0 \vee \overline{x_2} x_3 = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_2} x_3 = \\ &(\overline{x_1} \vee 1)\overline{x_2} x_3 = 1 \overline{x_2} x_3 = \overline{x_2} x_3 \end{aligned}$$

□

Задача 20. Докажете, че всяка симетрична булева функция, различна от константа, има само съществени променливи.

Решение: Да наречем тази функция f . Нека n е броят на нейните променливи. Щом f не е константа, f има стойност 0 върху поне един вектор и стойност 1 върху поне един вектор. Съгласно разсъжденията в решението на Задача 5, за всеки слой на n -мерния хиперкуб, f има една и съща стойност върху всички вектори от този слой. Лесно се вижда, че в хиперкуба има съседни слоеве (тоест, единият има една единица повече от другия), такива че f има стойност 0 върху единия от тях и стойност 1 върху другия от тях.

Без ограничение на общността, нека f има стойност 0 върху всички вектори от слой k и стойност 1 върху всички вектори от слой $k + 1$, за някое k , такова че $0 \leq k \leq n - 1$. Ще докажем едно помощно твърдение, чиято важност налага да го обособим като лема. Използваме контрапозитивното твърдение[†] на Лема 1 и търсеният резултат следва веднага.

Лема 1. Ако $f \in \mathcal{F}^n$ има поне една фиктивна променлива, то за всеки два съседни слоя L_k и L_{k+1} на n -мерния хиперкуб съществува вектор $\mathbf{a} \in L_k$ и съществува вектор $\mathbf{b} \in L_{k+1}$, такива че $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$.

Доказателство: Нека x_i е фиктивна променлива. По дефиниция:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

за всички булеви $(n - 1)$ -вектори $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$.

Да разгледаме произволно k , такова че $0 \leq k \leq n - 1$. Да разгледаме произволен булев $(n - 1)$ -вектор

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n,$$

който има точно k единици. Тогава n -векторът

$$\mathbf{a} = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$$

има точно k единици, а n -векторът

$$\mathbf{b} = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$$

има точно $k + 1$ единици. Тогава $\mathbf{a} \in L_k$, $\mathbf{b} \in L_{k+1}$ и $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$.

QED

□

Да си припомним релациите $\leq$ и $<$, дефинирани на лекции:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{0, 1\}^n : \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \leq b_i)$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{0, 1\}^n : \mathbf{x} < \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \wedge \neg \exists \mathbf{z} (\mathbf{z} \neq \mathbf{x} \wedge \mathbf{z} \neq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y})$$

[†]Контрапозитивното е “Ако съществуват съседни слоеве L_k и L_{k+1} на хиперкуба, такива че $\forall \mathbf{a} \in L_k \forall \mathbf{b} \in L_{k+1} : f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$, то f няма фиктивни променливи”.

Задача 21. Да разгледаме някаква $f \in \mathcal{F}^n$, такава че съществуват k вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ за някакво $k \geq 2$, такива че

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{a}_2 \leq \dots \leq \mathbf{a}_k$$

$$f(\mathbf{a}_1) \neq f(\mathbf{a}_2) \neq \dots \neq f(\mathbf{a}_k)$$

Да се докаже, че функцията има поне $k - 1$ съществени променливи.

Решение: Релацията $\leq$ е рефлексивна, но от второто ограничение следва, че векторите са два по два различни. Очевидно, по отношение на $\leq$ има верига

$$\mathbf{a}_1 < \mathbf{b}_{1,1} < \dots < \mathbf{b}_{1,t_1} < \mathbf{a}_2 < \mathbf{b}_{2,1} < \dots < \mathbf{b}_{2,t_2} < \dots < \mathbf{a}_{k-1} < \mathbf{b}_{k-1,1} < \dots < \mathbf{b}_{k-1,t_{k-1}} < \mathbf{a}_k$$

Твърдим, че в тази верига има поне $k - 1$ различни съседни двойки вектори[†], такива че функцията има противоположни стойности върху векторите от всяка двойка. Това твърдение е очевидно и няма да го доказваме. Векторите от всяка двойка се различават в точно една позиция, следователно са вектори от два съседни слоя на хиперкуба. Прилагаме контрапозитивното твърдение на Лема 1 и виждаме, че функцията има $k - 1$ фиктивни променливи.

Факта, че всяка двойка двойки задава **различни** фиктивни променливи, поради което заключаваме, че променливите не може да са по-малко от $k - 1$, е очевиден. $\square$

Задача 22. Нека $f, g \in \mathbf{F}_2^n$ са такива, че $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$ за точно нечетен брой вектори $\mathbf{a} \in \{0, 1\}^n$. Да се докаже, че всяка променлива е съществена за поне едната от функциите f и g .

Решение: Ограничението “ $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$ за точно нечетен брой вектори” е същото като “ f и g се различават върху точно нечетен брой вектори” – това следва тривиално от дефиницията на функцията $\oplus$.

И така, двете функции имат противоположни стойности върху подмножество на $\{0, 1\}^n$ с нечетна мощност. Да допуснем, че съществува променлива x_i , която е фиктивна и за двете функции. По дефиниция:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

за всяко раздаване на 0 и 1 на променливите $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$.

Да си представим и двете функции едновременно върху хиперкуба – да си представим n -мерния хиперкуб и до всеки негов връх, стойността на функцията f в червено и стойността на функцията g в синьо.

Да срежем хиперкуба в i -тата размерност. Получаваме два хиперкуба, всеки от размерност $n - 1$. За произволен връх $\mathbf{u}$ от единия получен $(n - 1)$ -мерен хиперкуб, ако $\mathbf{v}$ е неговият съответен връх[‡] в другия $(n - 1)$ -мерен хиперкуб, ясно е, че $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$ и $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v})$ – това е заради фиктивността на x_i по отношение и на f , и на g .

Следователно, броят на върховете, върху които f и g имат **една и съща стойност** в единия $(n - 1)$ -мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които f и g имат **една и съща стойност** в другия $(n - 1)$ -мерен хиперкуб. А оттук следва, че броят на върховете, върху които f и g имат **различна стойност** в единия $(n - 1)$ -мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които f и g имат **различна стойност** в другия $(n - 1)$ -мерен хиперкуб.

[†] Две такива двойки може да имат общ елемент, въпреки че са различни като двойки.

[‡] “Съответен връх” означава, че има същия етикет, тоест $(n - 1)$ -мерен булев вектор.

Но броят на върховете, върху които f и g се различават в оригиналния (преди срязването) n -мерен хиперкуб, е равен на сумата от броя на върховете, върху f и g се различават върху единия получен $(n-1)$ -мерен хиперкуб и броя на върховете, върху f и g се различават върху другия получен $(n-1)$ -мерен хиперкуб. Щом двете събираеми са равни, тяхната сума е четно число. Тогава броят на върховете, върху които f и g се различават в оригиналния (преди срязването) n -мерен хиперкуб, е четна. Кое то противоречи на условието на задачата. $\square$

Задача 23. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че следните две формули не са еквивалентни:

$$\begin{aligned} U &= (x \downarrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}\bar{z} \rightarrow ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z))) \\ V &= ((x \rightarrow y)|(x \downarrow (y\bar{z})) \vee \bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

Разрешените еквивалентни преобразувания са тези от Задача 18.

Решение: От една страна:

$$\begin{aligned} U &= \overline{x \downarrow \bar{y}} \vee (\overline{\bar{x}\bar{z}} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z))) \\ &= \overline{\overline{x} \vee \bar{y}} \vee \overline{\bar{x}\bar{z}} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z)) \\ &= x \vee \bar{y} \vee \overline{\bar{x}\bar{z}} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \quad // \text{ понеже е от вида } x \vee \dots \bar{x} \vee \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

От друга страна:

$$\begin{aligned} V &= \overline{(\bar{x} \vee y)(x \vee y\bar{z})} \vee \bar{y}\bar{z} \\ &= \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \overline{(x \vee y\bar{z})} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \\ &= \bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} \vee x \vee y\bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \\ &= x\bar{y} \vee 1\bar{x} \vee y\bar{z} \vee 1\bar{z} \vee \bar{y} \\ &= x(\bar{y} \vee 1) \vee \bar{z}(y \vee 1) \vee \bar{y} = x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \end{aligned}$$

Покажахме, че V е еквивалентна на $x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$. От тази проста формула лесно се вижда, че семантиката на V не е константа-единица. Следователно, U и V не са еквивалентни. $\square$

Задача 24. Намерете СъвДНФ на булевата функция $f = 01110100$.

Решение: Имената на променливите не са уточнени, така че имаме свобода да си ги изберем. Избираме x , y и z , като се ползва традиционната наредба x -преди- y и y -преди- z . Тогава таблицата на функцията е:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

СъвДНФ е:

$$\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$$

□

Задача 25. Намерете СъвДНФ на следните булеви функции:

А) $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2x_3$

Б) $f = 01101100$

В) $g = 0001\ 1101\ 1001\ 1011$

Г) $\overline{x_1\bar{x}_2} \rightarrow \bar{x}_3$

Д) $(x|y)\bar{z}$

Е) $xy \equiv (y \equiv z)$

Ако променливите не са именувани явно, допуснете подходящо именуване с, например, x, y, z или x_1, x_2, x_3 и така нататък.

Отговори и решения:

А) $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2x_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3$

Б) $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z$

В) $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4$

Г) $\overline{x_1\bar{x}_2} \rightarrow \bar{x}_3 = \overline{x_1\bar{x}_2} \vee \bar{x}_3 = \overline{\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3} = \overline{\bar{x}_1}\bar{x}_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. В този случай намерихме СъвДНФ с еквивалентни преобразувания. По-точно казано, извършихме редица от еквивалентни преобразувания, резултатът от които е израз, който е СъвДНФ по **формални** причини: има точно такава форма, каквато трябва да има една СъвДНФ.

Д) $(x|y)\bar{z} = \bar{x}y\bar{z}$. За съжаление, полученият израз **не е** СъвДНФ, защото няма желаната форма! За да е СъвДНФ с една пълна конюнктивна клауза, изразът трябва да е конкатенация от литерали, а този израз не е такъв, защото $\bar{x}y$ нито е литерал, нито е конкатенация от литерали. Ако искаме да решим подзадачата с еквивалентни преобразувания, трябва да продължим. $\bar{x}y\bar{z} = (\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}\bar{z}(x \vee \bar{x}) = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}$

Е) $\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}z$

□

Задача 26. Колко СъвДНФ има над n променливи?

Решение: Броят на пълните конюнктивни клаузи е точно 2^n , защото във всяка от тях участват точно n литерала, а за всеки от тях има точно 2 възможности независимо от останалите. Всяка СъвДНФ се определя еднозначно от това, кои пълни конюнктивни клаузи участват. Но отговорът 2^{2^n} за броя на всички СъвДНФ не е точен, понеже не може да няма нито една пълна конюнктивна клауза. С други думи, празната формула (празният стринг) не е СъвДНФ по дефиниция. Отговорът е $2^{2^n} - 1$.

Можем да го получим и с други разсъждения: всяка булева функция на n променливи без константа-нула има точно една СъвДНФ, а на различни СъвДНФ съответстват различни булеви функции. $\square$

Задача 27. Колко ДНФ има над n променливи?

Решение: Трябва да съобразим колко конюнктивни клаузи има. В конюнктивните клаузи има три възможности за всяка променлива (а не две, както беше при пълните конюнктивни клаузи) – променливата може да участва като положителен литерал, като отрицателен литерал или изобщо да не участва. Това означава 3^n възможности, но ако броим и възможността да няма участващи променливи изобщо, тоест празната последователност от литерали (празният стринг). Но ние искаме всяка пълна конюнктивна клауза да е непразна, тоест да има поне един литерал, така че възможността да няма нито един литерал отпада и възможностите са $3^n - 1$.

Всяка от пълните конюнктивни клаузи може да участва или да не участва, но трябва да има поне една такава, така че общо възможностите са $2^{3^n - 1} - 1$. $\square$

Задача 28. Намерете броя на булевите функции от $\mathcal{F}^n$, чиито СъвДНФ изпълняват условието:

1. Няма пълна конюнктивна клауза, в която броят на положителните литерали е равен на броя на отрицателните литерали.
2. Всяка пълна конюнктивна клауза има четен брой отрицателни литерали.
3. Всяка пълна конюнктивна клауза има поне два отрицателни литерала.

Решение:

1. Ако n е нечетно, то всички СъвДНФ са такива и отговорът е $2^{2^n} - 1$. Ако n е четно, отговорът е $2^p - 1$, където p е броят на n -векторите с неравен брой нули и единици. Очевидно, $p = 2^n - q$, където q е броят на n -векторите с равен брой нули и единици. Но ние знаем, че има точно $\binom{n}{n/2}$ начина да разположим $n/2$ нули и $n/2$ единици в линейна наредба, следователно $q = \binom{n}{n/2}$, следователно $p = 2^n - \binom{n}{n/2}$, следователно отговорът е $2^{2^n - \binom{n}{n/2}} - 1$.
2. За всеки входен вектор съответната пълна конюнктивна клауза участва в СъвДНФ тук функцията има стойност 1 върху този входен вектор. Искане функцията да е задължително 0 върху всички входни вектори с нечетен брой нули, тоест стойността на функцията може да варира само върху векторите с четен брой нули. Отговорът е $2^{2^{n-1}} - 1$, защото точно половината† вектори, тоест $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$, са тези с четен брой нули, а от $2^{2^{n-1}}$ вадим единица заради това, че функцията константа-нула няма СъвДНФ.

†Това се извежда тривиално, имайки предвид резултата от комбинаториката, че броят на подмножествата с четна мощност е равен на броя на подмножествата с нечетна мощност.

3. Върху векторите с нула нули и точно една нула, функцията трябва да е задължително 0. Освен това, не може да е константа-нула. Други ограничения няма. Има един вектор с нула нули и n вектора с точно една нула. Отговорът е $2^{2^n - n - 1} - 1$.

□

Задача 29. Нека $n \geq 2$. Да се определи дължината на СъвДНФ (като брой на пълните конюнктивни клаузи) на следните булеви функции, представени чрез формули:

1. $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$
2. $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \dots \vee \overline{x_n})$
3. $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$
4. $\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j)$

Решение: Задачата е същата като “колко единици съдържа каноничното представяне на функцията?”. Каноничното представяне на всяка от тези четири функции има лесна за определяне форма. Трябва да разберем каква е закономерността на каноничното представяне на всяка от тях. Сторим ли това, решението става тривиално.

1. Функцията е сума по модул две на всички променливи. Очевидно, тази сума е 1 точно върху тези вектори, които имат нечетен брой единици. Както вече казахме в решението на Задача 28, векторите с нечетен брой единици са точно половината, тоест $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. Отговорът е точно 2^{n-1} . Забележете, че **не е** $2^{2^n - 1}$, защото върху въпросните вектори стойностите на функцията не варират, а са само единици.
2. Лесно се вижда, че функцията е 0 върху точно два вектора: $00 \dots 0$ и $11 \dots 1$. Отговорът е $2^n - 2$.
3. Функцията има стойност 1 точно върху тези вектори, които имат поне две единици в себе си. Векторите, които нямат поне две единици в себе си, са тези с нула единици (само един) и с точно една единица (n такива). Отговорът е $2^n - n - 1$.
4. Може би е по-лесно да се съобрази каква е формата на каноничното представяне, ако използваме различно представяне на същата функция:

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\overline{x_i} \vee x_j)$$

Която и от двете формули да разгледаме, виждаме, че функцията е нула върху точно тези вектори, които имат поне една 1, която е вляво от поне една 0[†]. Следователно, функцията е единица точно върху векторите $00 \dots 00$, $00 \dots 01$, $00 \dots 11$, ..., $01 \dots 11$, $11 \dots 11$. Те са точно $n + 1$, и това е отговорът. □

Задача 30. Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ са булеви функции, такива че СъвДНФ на f има k_1 пълни конюнктивни клаузи, а на g , k_2 пълни конюнктивни клаузи. Да се определи дължината, в брой пълни конюнктивни клаузи, на:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) &= fg \\ t(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f \vee g \end{aligned}$$

[†] Тоест, в които има $x_i = 1$ и $x_j = 0$ при $i < j$; тоест, които са от вида $\dots 1 \dots 0 \dots$.

Решение: Да разгледаме първо fg . Забележете, че това е функция **не** на n , а на $2n$ променливи. Нейната таблица е показана схематично на следната таблица. Да си представим, че върху входните вектори, всеки с дължина $2n$, които са общо 2^{2n} на брой, е дефинирано групиране в нещо като правоъгълници с размери $n \times 2^n$, които на таблицата са показани в лявата страна, оцветени в розово и зелено. Всеки зелен правоъгълник огражда една група от стойности на y -променливите, като групите са 2^n общо и съдържанието им е едно и също: всяка група съдържа точно всички n -вектори в лексикографски ред. Розовите правоъгълници ограждат групи от стойности на x -променливите, като тези групи пак са 2^n общо и всяка има 2^n n -вектора, но сега всяка група съдържа 2^n копия на един и същи n -вектор.

Тъй като функцията g зависи от y -стойностите, а функцията f , от x -стойностите, в дясната страна, където са функционалните стойности, наблюдаваме следните закономерности. Колоната на g се състои от 2^n подколони, всяка от които е копие на един и същи pattern, който има точно k_2 единици (по условие g има СъвДНФ с точно k_2 пълни конюнктивни клаузи). Точно какво е съдържанието на тази повтаряща се колона зависи от конкретиката на g . В таблицата " $\tilde{g}_i$ " е кратък запис за $g(\tilde{y}_i)$, където $\tilde{y}_i$ е i -ият вектор от y -векторите, за $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

От друга страна, колоната на f се състои от 2^n подколони, всяка от които съдържа 2^n копия на една и съща стойност, а именно функционалната стойност на f върху i -ия от x -векторите за $0 \leq i \leq 2^n - 1$, която е отбелязана с $\tilde{f}_i$. Очевидно точно k_1 от тези подколони са от единици. Кой точно, зависи от конкретиката на f .

И така, функцията h е конюнкция от f и g . Колоната на h не е изобразена, но лесно може да си я представим написана най-вдясно, с височина 2^{2n} , състояща от поелементни конюнкции от колоните на g и f . Тривиално е да се съобрази, че ако разбием колоната на h на 2^n подколони аналогично на разбиванията на колоните на g и f , точно $2^n - k_1$ от подколоните ще са само от нули, защото колоната на f има точно $2^n - k_1$ от подколони от нули, които в поелементните конюнкции "нулират" стойността на h върху дадения $2n$ -вектор независимо от стойностите на g върху него. А останалите k_1 на брой подколони на f са само от единици. За всяка от тях, функцията h получава точно k_2 единици заради поелементната конюнкция.

Общо, h има точно $k_1 \times k_2$ единици.

Сега да разгледаме функцията t . Съображенията са аналогични и таблицата е същата, но сега търсим мощността не на сечение, а на обединение. Колоната на g има общо $k_2 \times 2^n$ единици, а колоната на f има общо $k_1 \times 2^n$ единици. От $k_1 2^n + k_2 2^n = (k_1 + k_2) 2^n$ трябва да извадим, съгласно принципа на включването и изключването, мощността на сечението, която, както вече установихме, е $k_1 k_2$. Отговорът е $(k_1 + k_2) 2^n - k_1 k_2$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$	$y_1, y_2, \dots, y_n$	g	f
$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $\dots$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$	$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ $\dots$ $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$\tilde{g}_0$ $\tilde{g}_1$ $\tilde{g}_2$ $\dots$ $\tilde{g}_{2^n-2}$ $\tilde{g}_{2^n-1}$	$\tilde{f}_0$ $\tilde{f}_0$ $\tilde{f}_0$ $\dots$ $\tilde{f}_0$ $\tilde{f}_0$
2^n копия на $00 \dots 00$	всички n -вектори, лексикографски	pattern с k_2 единици	2^n еднакви ст-сти
$0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $\dots$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$	$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ $\dots$ $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$\tilde{g}_0$ $\tilde{g}_1$ $\tilde{g}_2$ $\dots$ $\tilde{g}_{2^n-2}$ $\tilde{g}_{2^n-1}$	$\tilde{f}_1$ $\tilde{f}_1$ $\tilde{f}_1$ $\dots$ $\tilde{f}_1$ $\tilde{f}_1$
2^n копия на $00 \dots 01$	всички n -вектори, лексикографски	същият pattern с k_2 ед.	2^n еднакви ст-сти
$\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$	$\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$	$\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$	$\dots$ $\dots$ $\dots$ $\dots$
$1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $\dots$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ $\dots$ $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$	$\tilde{g}_0$ $\tilde{g}_1$ $\tilde{g}_2$ $\dots$ $\tilde{g}_{2^n-2}$ $\tilde{g}_{2^n-1}$	$\tilde{f}_{2^n-1}$ $\tilde{f}_{2^n-1}$ $\tilde{f}_{2^n-1}$ $\dots$ $\tilde{f}_{2^n-1}$ $\tilde{f}_{2^n-1}$
2^n копия на $11 \dots 11$	всички n -вектори, лексикографски	същият pattern с k_2 ед.	2^n еднакви ст-сти

□

Задача 31. Нека $x_1, x_2, \dots, x_9$ са булеви променливи. Намерете полинома на Жегалкин на

следната булева функция

$$((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3) \oplus ((x_4 \wedge x_5) \rightarrow x_6) \oplus ((x_7 \wedge x_8) \rightarrow x_9)$$

Решение:

$$\begin{aligned} & ((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3) \oplus ((x_4 \wedge x_5) \rightarrow x_6) \oplus ((x_7 \wedge x_8) \rightarrow x_9) = \\ & (\overline{x_1 x_2} \vee x_3) \oplus (\overline{x_4 x_5} \vee x_6) \oplus (\overline{x_7 x_8} \vee x_9) = \\ & (\overline{\overline{x_1 x_2} \vee x_3}) \oplus (\overline{\overline{x_4 x_5} \vee x_6}) \oplus (\overline{\overline{x_7 x_8} \vee x_9}) = \\ & (\overline{\overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_3}}) \oplus (\overline{\overline{x_4 x_5} \wedge \overline{x_6}}) \oplus (\overline{\overline{x_7 x_8} \wedge \overline{x_9}}) = \\ & (x_1 x_2 \overline{x_3}) \oplus (x_4 x_5 \overline{x_6}) \oplus (x_7 x_8 \overline{x_9}) = \\ & (x_1 x_2 (1 \oplus x_3)) \oplus (x_4 x_5 (1 \oplus x_6)) \oplus (x_7 x_8 (1 \oplus x_9)) = \\ & (\overline{x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3}) \oplus (\overline{x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6}) \oplus (\overline{x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9}) = \\ & (1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3) \oplus (1 \oplus x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6) \oplus (1 \oplus x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9) = \\ & 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus 1 \oplus x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6 \oplus 1 \oplus x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9 = \\ & 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6 \oplus x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9 = \\ & 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_4 x_5 \oplus x_7 x_8 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_4 x_5 x_6 \oplus x_7 x_8 x_9 \end{aligned}$$

Това е полиномът. □

Задача 32. Докажете или опровергайте, че следното множество от булеви функции е пълно:

$$\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$$

Решение: Това множество не е пълно. Да си представим произволна схема от функционални елементи, всеки от които е конюнкция, дизюнкция или импликация. Лесно е да се съобрази, че ако на входовете на схемата бъдат подадени само единици, на изхода ще излезе също единица. Следователно това множество не е пълно. □

Авторът благодари много на **Добромир Кралчев** за многобройните корекции на граматически и стилистични грешки, както и за корекциите на грешки в решенията на две от задачите. Благодарности на **Стоян Томицин** за откритата грешка в условието на Задача 14. Благодарности на **Християн Валентинов Тонев** за откритите и коригирани грешки в решенията на осем от задачите.

Авторът благодари отново на **Добромир Кралчев** за многобройните граматични и стилистични корекции при повторен прочит.