

Контролно 2 на група 7

15 януари 2026 г.

Задача 1. (30т.) Нека $M = \{A, A\#, B, C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#\}$ е множеството от нотите ($|M| = 12$). На пианото черните клавиши представляват нотите, в които има $\#$ (те са 5 на брой), а белите клавиши представляват всички останали ноти. Когато суеверният пианист свири мелодия, той винаги гледа да натиска черните клавиши **нечетен** брой пъти.

Нека $S(n) \subseteq M^n$ е множеството от мелодии, които би изсвирил суеверния пианист, с дължина n . Съставете рекурентно уравнение, което да намира $|S(n)|$, и напишете общото му решение.

Решение. Лесно се вижда, че $S(n) = \{A\#, C\#, D\#, F\#, G\#\}$ и $|S(1)| = 5$.

Разглеждаме $S(n)$, когато $n > 1$. Разбиваме $S(n)$ по последния натиснат клавиш:

- Нека този клавиш е бял. Броят на възможностите за последната нота са 7. Ясно е, че останалите ноти можем да ги изберем по $|S(n-1)|$ начина.
- Нека този клавиш е черен. Броят на възможностите за последната нота са 5. Остатъкът от мелодията трябва да бъде с дължина $n-1$ и броят на натиснатите черни клавиши да бъде четен. Можем да получим броя на тези мелодии като от множеството на всички възможни мелодии без ограничения извадим тези, в които броят натиснати черни клавиши е нечетен. Тоест броят на тези мелодии е $12^{n-1} - |S(n-1)|$.

Тоест, когато $n > 1$, $|S(n)| = 7|S(n-1)| + 5(12^{n-1} - |S(n-1)|) = 2|S(n-1)| + \frac{5}{12}12^n$

Получаваме рекурентното уравнение:

$$|S(n)| = \begin{cases} 5, & \text{за } n = 1 \\ 2|S(n-1)| + \frac{5}{12}12^n & \text{за } n > 1 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение е:

$$x = 2$$

От нехомогенната част "идва" една 12-ка. Получаваме мултимножеството $\{2, 12\}_M$. Тогава общото решение на рекурентното уравнение е:

$$|S(n)| = 2A^n + 12B^n$$

където A и B са някакви константи.

Задача 2. (30 т.) 25 човека са на парти. Измежду всеки трима има поне двама, които се познават. Докажете, че съществува човек, който познава поне 12 човека. Познанството е симетрично, тоест ако A познава B , то B познава A .

Решение: Задачата може да се моделира чрез граф $G(V, E)$, където V е множеството от хората на партито и ребро между два върха има т.с.т.к. двамата човека се познават. Трябва да докажем, че съществува връх със степен поне 12.

Това, че измежду всеки трима има поне двама, които се познават, е еквивалентно на $\forall u, v \in V : ((u, v) \notin E \longrightarrow \forall w \in V \setminus \{u, v\} : (u, w) \in E \vee (v, w) \in E)$. Казано с думи, ако двама човека не се познват, то всеки друг човек от партито ще познава поне един от двамата.

Взимаме $u, v \in V$ такива, че $(u, v) \notin E$. Ако такива върхове не съществуват, то графът е пълен и от това директно следва исканото. Щом $(u, v) \notin E$, то $\forall w \in V \setminus \{u, v\} : (u, w) \in E \vee (v, w) \in E$. Тъй като $|V| = 25$ по условие, то $|V \setminus \{u, v\}| = 23$. Съгласно принципа на Дирихле поне един от двата върха u или v ще има степен поне $\lceil \frac{23}{2} \rceil = 12$.

Задача 3. (50 т.) Да се докаже, че:

а) 10т. Всеки най-дълъг път в дърво има листо за начало и край.

б) 10т. В дърво с n върха съществува антиклика с големина поне $\frac{n}{2}$.

в) 15т. За всеки граф $G(V, E)$ с $|V| = n$ и $|E| = n + k$, където $k \in \mathbb{N}$, съществуват поне $k + 1$ различни цикъла в G .

г) 15т. За граф G , ако $\Delta(G)$ е най-голямата степен на връх в G , то $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Решение: **а)** Нека T е дърво и нека $p = v_0 \dots v_k$, $k \in \mathbb{N}^+$ е най-дълъг път в T . Всички съседи на v_0 са част от p , защото иначе щяхме да получим по-дълъг път от най-дългия път в T . Ако допуснем, че v_0 има повече от един съсед, то $\exists i \in \{2, \dots, k\} : (v_0, v_i) \in E$. Но тогава $v_0 v_1 \dots v_i v_0$ е цикъл в T , което е противоречие с това, че T е дърво. Получихме, че $d(v_0) = 1$. Абсолютно аналогично, съседите на v_k са част от p и ако v_k имаше повече от един съсед, то пак щяхме да получим цикъл в T . Тогава и $d(v_k) = 1$.

б) Нека T е дърво с n върха. В T няма нечетен цикъл, защото по дефиниция T е ацикличен. Съгласно изучаваното от лекции T е двуделен, от което съществува разбиване на множеството на върховете $\{X, Y\}$ такова, че няма ребро, на което двата му краища да са в X или в Y . От това следва, че както X , така и Y , са антиклики в T . Съгласно принципа на Дирихле, тъй като $|X| + |Y| = n$, едно от множествата ще има мощност поне $\frac{n}{2}$.

в) Нека вземем покриваща гора T на G , като вземем покриващо дърво от всяка свързана компонента на G . Нека броят на свързаните компоненти е p . Нека за всяко $i \in \{1, \dots, p\}$ n_i е броят на върховете в i -тата свързана компонента. Тъй като от всяка свързана компонента вземаме покриващо дърво, то от i -тата компонента ще "дойдат" $n_i - 1$ ребра в T . Тоест в T има $\sum_{i=1}^p (n_i - 1) = n - p$ ребра.

Разглеждаме произволно ребро e от G , което не е в T . Нека реброто e е част от i -тата свързана компонента на G . Щом добавим e към покриващото дърво на i -тата компонента, което сме взели в T , то съгласно изучаваното от лекции ще получим уницикличен граф. Нещо повече - в този цикъл задължително ще участва реброто e .

Броят на ребрата, които са от G , но не са от T , е $n + k - (n - p) = k + p$. За всяко такова ребро доказахме, че съществува цикъл, в който това ребро участва. Тоест получихме $k + p$ различни цикъла. Ясно е, че в G има поне 1 свързана компонента, тоест има поне $k + 1$ различни цикъла.

г) Ще докажем, че можем да оцветим върховете на G с $\Delta(G) + 1$ цвята, като направим индукция по броя на върховете в G .

База: Нека $n = 1$, тоест G е тривиалният граф. $\Delta(G) = 0$ и очевидно можем да оцветим върховете на G в един цвят.

Индуктивно предположение: Нека за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е изпълнено, че ако граф G има n върха, то съществува оцветяване на върховете на G с $\Delta(G) + 1$ цвята.

Индуктивна стъпка: Нека $G(V, E)$ е граф с $n + 1$ върха. Нека вземем произволен връх $v \in V$. Графът $G - v$ е с n върха и от И.П. следва, че за $G - v$ съществува оцветяване с $\Delta(G - v) + 1$ цвята. Лесно се вижда, че $\Delta(G) \geq \Delta(G - v)$, тъй като премахването на връх не води до увеличаване на степен на връх. Щом съществува оцветяване с $\Delta(G - v) + 1$ цвята, то съществува и оцветяване с $\Delta(G) + 1$ цвята. Нека $f : V' \rightarrow C$, е такова оцветяване, като $V' = V \setminus \{v\}$ и $C = \{1, \dots, \Delta(G - v) + 1\}$. Ясно е, че $d(v) \leq \Delta(G)$, което влече, че съществува $j \in C$ такова, че за всички съседи u на v е изпълнено $j \neq f(u)$. Нека $g : V \rightarrow C$, където за $x \in V$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за } x \in V' \\ j & \text{за } x = v \end{cases}$$

За всяко ребро (x, y) от G има два случая - то да е част и от $G - v$ или (x, y) да е инцидентно с v . В първия случай имаме, че $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$ и това, че f е оцветяване в $G - v$ влече $g(x) \neq g(y)$. Във втория случай или $x = v$ или $y = v$, като нека БОО $x = v$. y е съсед на v , тоест $f(y) \neq j$. y е част от $G - v$ и $g(y) = f(y)$, а пък $g(x) = j$, тъй като $x = v$. Тогава и $g(x) \neq g(y)$.

Получихме, че g е оцветяване на G с $\Delta(G) + 1$ цвята.

Задача 4. (30т.) Докажете, че ако граф $G(V, E)$ е двуделен и $\delta(G) \geq k$ за $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, то в G съществува цикъл с дължина поне $2k$, където $\delta(G)$ е най-малката степен на връх от G .

Решение: Нека $p = v_0 \dots v_q$, $q \in \mathbb{N}$, е най-дълъг път от v_0 в G . От доказателството на **3a)** знаем, че всички съседи на v_0 са част от p . Нека тези съседи са $u_1, \dots, u_d$, $d \in \mathbb{N}$, като нека БОО $u_1, \dots, u_d$ са подредени по срещането им в p . Тоест $v_1 = u_1$ и $p = v_0 u_1 \dots u_2 \dots u_d \dots v_q$.

Тъй като G е двуделен, то $u_1, \dots, u_d$ са от един дял, което влече, че няма как u_i и u_{i+1} да са съседи за всяко $i \in \{1, \dots, d-1\}$. Тоест за всяко $i \in \{2, \dots, d\}$, ако u'_i е такъв връх, че u'_i е съсед на u_i в p и u'_i е преди u_i спрямо v_0 , то $u'_i \neq u_{i-1}$. Получаваме следния вид на p : $p = v_0 u_1 \dots u'_2 u_2 \dots u'_d u_d \dots v_q$. Нека c е цикълът, получен след взимането на подпътя на p от v_0 до u_d и долепянето на v_0 до него. Дължината на този цикъл е поне $2d$, а тъй като $d \geq \delta(G) = k$. Тоест получихме цикъл с дължина поне $2k$.