# Второ малко контролно по Дискретни Структури на група 8, специалност Компютърни науки, поток 2

8 януари 2026 г.

**Задача 1** Нека $G = (V, E)$ е граф с $n$ върха и $m$ ребра, където $n \geq 4$ и $m = n - 1$, но $G$ **не е** дърво. Оттук следва, че $G$ не е свързан.

**а)** Да се докаже, че не е възможно всички свързани компоненти на $G$ да са дървета. (10 т.)

**б)** Да се докаже, че не е възможно всички свързани компоненти на $G$ да **не** са дървета. (10 т.)

**За подточки в), г) и д) приемете, че $G$ има точно две свързани компоненти.**

**в)** Да се докаже, че свързаната компонента, която не е дърво, има точно толкова върхове, колкото ребра. (6 т.)

**г)** Да се докаже, че свързаната компонента, която не е дърво, има **поне един** цикъл. (4 т.)

**д)** Да се докаже, че свързаната компонента, която не е дърво, има **точно един** цикъл. (20 т.)

**Решение:** Щом $G$ не е свързан, то тогава $G$ има поне две свързани компоненти. Нека $G$ има $k \in \mathbb{N}$ свързани компоненти, като е ясно, че $k > 1$.

**а)** Ще докажем, че не е възможно всички свързани компоненти на $G$ да са дървета. Да допуснем противното - всички $k$ свързани компоненти са дървета. Нека $n_i$ е броят на върховете и $m_i$ е броят на ребрата на $i$-тата свързана компонента, където $1 \leq i \leq k$. Тъй като тя е дърво, то $m_i = n_i - 1$. Очевидно е, че

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} 1 = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$$

Но $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, тоест:

$$m = \sum_{i=1}^{k} n_i - k = n - k$$

Знаем от условието, че $m = n - 1$, тоест $k = 1$, тоест $G$ има точно една свързана компонента. Но това е противоречие с $k > 1$. Тогава допускането е грешно и не е възможно всички свързани компоненти на $G$ да са дървета.

**б)** Ще докажем, че не е възможно всяка свързана компонента на $G$ да не е дърво. Да допуснем противното - всички $k$ свързани компоненти не са дървета. Нека $n_i$ е броят на върховете и $m_i$ е броят на ребрата на $i$-тата свързана компонента, където $1 \leq i \leq k$. Съществува някакво $l_i \in \mathbb{Z}$, такова, че $m_i = n_i + l_i$, където $l_i > -1$ за $1 \leq i \leq k$. Последното е вярно, тъй като дървото е минималният спрямо брой на ребрата свързан граф на $n$ върха, а то има $m = n - 1$ ребра. Тоест, граф с точно едно ребро по-малко отколкото върхове е дърво, което не е възможно по допускане. От друга страна, граф с по-малко две или повече ребра отколкото върхове не може да е свързан, което също не е възможно за свързаната компонента по дефиниция. Тогава

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i + l_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i + \sum_{i=1}^{k} l_i = n + \sum_{i=1}^{k} l_i$$

Знаем от условието, че $m = n - 1$, тоест $\sum_{i=1}^{k} l_i = -1$. Но, за всяко $l_i \geq 0$. Тогава $\sum_{i=1}^{k} l_i = -1$ е противоречие, защото няма как да събираме числа по-големи или равни на нула и да получим $-1$.

Тогава допускането е грешно и не е възможно всяка свързана компонента на $G$ да не е дърво. Щом $G$ има поне две свързани компоненти, не е възможно всички да са дървета, и не е възможно всички да не са дървета, то поне една е дърво и поне една не е дърво.

**в)** Нека свързаните компоненти на $G$ са $G'$ и $G''$. БОО, нека $G'$ е дърво, а $G''$ не е дърво. Ясно е, че

$$m = n - 1 = E(G') + E(G'')$$

Но $G'$ е дърво, тоест $E(G') = V(G') - 1$. Тогава:

$$m = n - 1 = V(G') - 1 + E(G'') \implies n - V(G') - 1 = E(G'') - 1 \implies V(G'') = E(G'')$$

Тоест, броят на върховете и ребрата на $G''$ е равен.

**г)** Тогава е ясно, че $G''$ има поне един цикъл. Ако $G''$ нямаше цикли, то тя щеше да е дърво (тъй като е свързана компонента), а тогава $V(G'') = E(G'')$ е противоречие.

**д)**Трябва да докажем, че $G''$ има само един цикъл. Един начин да направим това е чрез покриващо дърво. Покриващо дърво има точно $V(G'') = E(G'') - 1$ ребра. В дървото, между всеки връх има точно един път. Ясно е, че извън покриващото дърво, остава точно едно ребро, което създава нов път между два върха с дължина 1. Нека реброто е с краища върховете $u$ и $v$. Със сигурност то добавя един цикъл $c$, в който участват $u$ и $v$, тъй като добавя втори път между тях (те вече имат един в дървото). Да предположим, че освен цикълът $c$, чрез добавянето на $(u, v)$ се е появил и още един, различен от $c$, цикъл $c'$. Тогава, $u$ и $v$ задължително също участват в $c'$. Иначе, $c'$ би бил съставен само от ребра от $G'' - (u, v)$, което е противоречие. Тогава има път между върховете $u$ и $v$ определен от $c'$ без реброто $(u, v)$. От друга страна, има път между върховете $u$ и $v$ определен от $c$ без реброто $(u, v)$. Но $c$ и $c'$ са различни, и тогава пътищата между $u$ и $v$ са различни. Но в тези пътища не участва $(u, v)$, тоест те са част от дървото $G'' - (u, v)$, което е противоречие с единствеността на пътищата в дърво. Тогава остава предположението да е грешно. Наистина добавянето на ребро създава само 1 цикъл.

Друг начин е да вземем произволен цикъл, като знаем, че такъв съществува. От този цикъл можем да премахнем ребро, като знаем, че това не променя свързаността на графа. Остава граф с $V(G'') = E(G'') - 1$ ребра, който е свързан, тоест дърво. Оттук нататък доказателството е същото като по-горе.

**Задача 2** Разполагате с речник. Известно е, че в речника има точно две еднобуквени думи и точно по шест $k$-буквени думи за всяко $k > 1$. Вие искате да изпратите писмо, съставено само и единствено от думи от речника. За да съберете повече думи, не оставяте интервали между думите (вместо "това е писмо” пишете "товаеписмо"). Думите могат да се повтарят. Не можете да отрязвате думи. Искате да откриете колко различни (спрямо избора на думите) такива писма с дължина $n$ букви могат да бъдат съставени при дадения речник.

**а)** Изведете рекурентно уравнение с крайна история (броят на събираемите не зависи от $n$). (35 т.)

**б)** Решете рекурентното уравнение (15 т.):

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n-1) + 4T(n-2), & \text{ако } n \geq 2 \\ 2, & \text{ако } n = 1, \\ 1, & \text{ако } n = 0 \end{cases}$$

**Решение:** **а)** Нека $T(n)$ е броят начини да съставим писмо с $n$ символа. Да запишем няколко базови случая:

$$T(0) = 1(\text{тъй като има точно едно празно писмо}$$

$$T(1) = 2(\text{тъй като има точно 2 едносимволни думи}$$

Ще изведем формула за $T(n)$, приемаме, че оттук нататък $n > 1$. Разглеждаме множеството на съобщенията спрямо дължината на първата дума. Това е очевидно разбиване на множеството от всички думи с дължина $n$. Ако първата дума е с дължина 1, има точно 2 начина да я изберем. Остатъкът от съобщението можем да изберем по точно $T(n-1)$ начина. Ако първата дума е с дължина $k, k \neq 1$, то можем да я изберем по 6 начина, а остатъкът може да изберем по точно $T(n-k)$ начина. Тогава:

$$T(n) = 2T(n-1) + 6T(n-2) + 6T(n-3) + \ldots + 6T(1) + 6T(0)$$

Ще опростим като вземем уравнението за $T(n-1)$:

$$T(n-1) = 2T(n-2) + 6T(n-3) + 6T(n-4) + \ldots + 6T(1) + 6T(0)$$

и извадим $T(n-1)$ от $T(n)$:

$$\begin{aligned} T(n) - T(n-1) = &(2T(n-1) + 6T(n-2) + 6T(n-3) + \ldots + 6T(1) + 6T(0)) \\ &- (2T(n-2) + 6T(n-3) + 6T(n-4) + \ldots + 6T(1) + 6T(0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) - T(n-1) = &2T(n-1) + 6T(n-2) + 6T(n-3) + \ldots + 6T(1) + 6T(0) \\ &- 2T(n-2) - 6T(n-3) - 6T(n-4) - \ldots - 6T(1) - 6T(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) - T(n-1) = &2T(n-1) + 6T(n-2) + \cancel{6T(n-3)} + \ldots + \cancel{6T(1)} + \cancel{6T(0)} \\ &- 2T(n-2) - \cancel{6T(n-3)} - \cancel{6T(n-4)} - \ldots - \cancel{6T(1)} - \cancel{6T(0)} \end{aligned}$$

$$T(n) - T(n-1) = 2T(n-1) + 6T(n-2) - 2T(n-2)$$

$$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$$

Това е уравнението, което търсехме.
**б)** Характеристичното уравнение на $T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$ е

$$x^2 = 3x + 4$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

То има корени $x_1 = 4$ и $x_2 = -1$. Търсеното уравнение има общ вид

$$T(n) = 4^n A + (-1)^n B$$

Използваме стойностите за $n = 0$ и $n = 1$, за да съставим и решим система от уравнения спрямо $A$ и $B$

$$\begin{cases} T(0) = 1 = A + B \\ T(1) = 2 = 4A - B \end{cases} \tag{1}$$

Представяме $B$ чрез $A$:

$$B = 1 - A$$

и заместваме:

$$2 = 4A - 1 + A = 5A - 1$$

$$3 = 5A$$

$$A = \frac{3}{5}$$

Тогава

$$B = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Търсеното уравнение е

$$T(n) = \frac{3}{5}4^n + \frac{2}{5}(-1)^n$$