Примерни решения на задачите от изпита по Дискретни Структури, КН 2 поток, февруари 2026 г.

Задача 1. Докажете по два начина, че за всяко цяло положително n е в сила

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-1} = n2^{n} \tag{1}$$

А) Докажете тъждеството по индукция.

Б) Докажете тъждеството с решаване на рекурентно уравнение.

Решение. **А)** Ето доказателство по индукция.

Базата е за $n = 1$. Лявата страна на (1) е

$$\sum_{k=1}^{1}(k+1)2^{k-1} = (1+1)2^{1-1} = 2 \cdot 2^{0} = 2$$

Дясната страна на (1) е

$$1 \cdot 2^{1} = 2$$

Лявата и дясната страна са равни. ✓

Индуктивното предположение е, че за някое цяло положително n, (1) е в сила.

Ще докажем, че

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)2^{k-1} = (n+1)2^{n+1}$$

Разглеждаме лявата страна.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)2^{k-1} = \quad \text{// свойство на сумирането}\\
&\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-1}\right) + (n+2)2^{n} = \quad \text{// от индуктивното предположение}\\
&n2^{n} + (n+2)2^{n} = (n+n+2)2^{n} = (2n+2)2^{n} = (n+1)2^{n+1}
\end{aligned}$$

Което и трябваше да покажем.

Б) Ще докажем (1), решавайки рекурентно уравнение. Нека, за $n \geq 1$,

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)2^{k-1}$$

Тогава, за $n \geq 2$,

$$T(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)2^{k-1}$$

Тогава

$$T(n) - T(n-1) = (n+1)2^{n-1} \quad \leftrightarrow \quad T(n) = T(n-1) + \frac{n+1}{2}2^{n}$$

с начално условие $T(1) = 2$. Характеристичното уравнение е

$$x - 1 = 0$$

откъдето имаме мултимножество от корените $\{1\}_M$. От нехомогенната част имаме мултимножество $\{2, 2\}_M$, тъй като полиномът $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ е от първа степен. Обединението на мултимножествата е $\{1, 2, 2\}_M$. Оттук общото решение е

$$T(n) = C_1 1^n + C_2 2^n + C_3 n 2^n = C_1 + C_2 2^n + C_3 n 2^n$$

за някакви константи C_1, C_2, C_3. Трябват ни още две начални условия, които са

$$T(2) = T(1) + \frac{2+1}{2} 2^2 = 2 + \frac{3}{2} \cdot 4 = 8$$
$$T(3) = T(2) + \frac{3+1}{2} 2^3 = 8 + 2 \cdot 8 = 24$$

Тогава

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 2^1 + C_3 \cdot 1 \cdot 2^1 = C_1 + 2C_2 + 2C_3 \\ 8 &= C_1 + C_2 2^2 + C_3 \cdot 2 \cdot 2^2 = C_1 + 4C_2 + 8C_3 \\ 24 &= C_1 + C_2 2^3 + C_3 \cdot 3 \cdot 2^3 = C_1 + 8C_2 + 24C_3 \end{aligned}$$

Решението на системата от линейни уравнения е $(C_1, C_2, C_3) = (0, 0, 1)$, откъдето

$$T(n) = 0 + 0 \cdot 2^n + 1 \cdot n 2^n = n 2^n$$

Което и трябваше да покажем. $\square$

Задача 2. Намерете броя на решенията в цели положителни нечетни числа на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 98$$

Дайте отговор-число.

Решение. Добре известно е, че всяко цяло положително нечетно число е от вида $2k + 1$, за някое естествено k. Нека

$$\begin{aligned} x_1 &= 2y_1 + 1 \\ x_2 &= 2y_2 + 1 \\ x_3 &= 2y_3 + 1 \\ x_4 &= 2y_4 + 1 \end{aligned}$$

където $y_1, \ldots, y_4$ са естествени числа. Търсим броя на решенията в естествени числа на уравнението

$$\begin{aligned} (2y_1 + 1) + (2y_2 + 1) + (2y_3 + 1) + (2y_4 + 1) = 98 \ &\leftrightarrow \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 94 \ &\leftrightarrow \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 47 \ & \end{aligned}$$

От лекции знаем, че броят на решенията на това уравнение в естествени числа е равен на броя на разполаганията на 47 анонимни топки в 4 именувани кутии, който са свой ред е

$$\binom{47 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{50}{3} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{6} = 50 \cdot 49 \cdot 8 = 400 \cdot 49 = 19\,600 \qquad \square$$

Задача 3. Нека N е естествено число. Намерете броя на решенията в цели положителни числа на неравенството

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq N \tag{2}$$

Решение. Щом $x_1, \ldots, x_5$ са цели **положителни**, има смисъл да въведем пет нови естествени променливи $x'_1, \ldots, x'_5$, като $x_i = x'_i + 1$ за $i \in \{1, \ldots, 5\}$. Изразено в новите променливи, неравенството (2) става

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + 5 \leq N \quad \leftrightarrow \quad x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 \leq N - 5 \tag{3}$$

където $x'_1, \ldots, x'_5$ са естествени числа.

Съгласно изучаваното на лекции, **равенството**

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = N - 5 \tag{4}$$

има $\binom{(N-5)+5-1}{5-1} = \binom{N-1}{4}$ решения в естествени числа.

По отношение на **неравенството**

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 \leq N - 5$$

имаме право да кажем, че всъщност

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = M \tag{5}$$

където $M \in \{0, 1, \ldots, N-5\}$. Равенството (5) има $\binom{M+5-1}{5-1} = \binom{M+4}{4}$ решения в естествени числа. Оттук имаме отговор на задачата

$$\sum_{M=0}^{N-5} \binom{M+4}{4} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \cdots + \binom{N-1}{4} \tag{6}$$

Решението (6) е субоптимално като бързодействие на алгоритъма и носи малък брой точки. По-добро решение е това. Добавяме една изкуствена променлива y към лявата страна на (3) и превръщаме неравенството в равенство. А именно,

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 \leq N - 5 \quad \leftrightarrow \quad x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 + y = N - 5 \tag{7}$$

където $x'_1, \ldots, x'_5, y$ са естествени числа. Уравнението (7) има

$$\binom{(N-5)+6-1}{6-1} = \binom{N}{5}$$

решения в естествени числа.

Забележка: решението $\binom{N}{5}$ може да се получи и от (6) чрез прилагане на тъждеството

$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1} + \cdots + \binom{q}{q-1} + \binom{q-1}{q-1}, \quad \text{където } p, q \in \mathbb{N}^+, p \geq q$$

с $q - 1 = 4$ и $p - 1 = N - 1$, но това тъждество не е доказвано на лекции и би трябвало да се докаже за пълен брой точки.

Задача 4. Нека $G = (V, E)$ е ориентиран граф. Докажете или опровергайте следното твърдение: G е силно свързан тогава и само тогава, когато за всеки срез $\{V_1, V_2\}$ съществува ребро (u, v), такова че $u \in V_1$ и $v \in V_2$.

Решение. Твърдението е вярно. В едната посока, нека G е силно свързан и $\{V_1, V_2\}$ е срез. По дефиниция, $V_1, V_2 \neq \emptyset$. Нека x е произволен връх от V_1 и y е произволен връх от V_2. По определение, съществува (ориентиран) път $p = x, \ldots, y$. Всеки връх на p е или от V_1, или от V_2. Щом началото на p е от V_1 и краят на p е от V_2, очевидно в p съществуват различни върхове u и v, такива че u е върхът преди v в p и $u \in V_1$ и $v \in V_2$. Тогава $(u, v) \in E$, такова че $u \in V_1$ и $v \in V_2$. В тези разсъждения използвахме обобщение на твърдение, което на лекции приехме за очевидно за неориентираните графи: ако е даден срез в неориентиран граф и път, чиито един край е от единия дял на среза, а другият край е от другия дял на среза, то в пътя има ребро, единият край на което е от единия дял на среза, а другият край на което е от другия дял на среза.

В другата посока, нека за всеки срез $\{V_1, V_2\}$ съществува ребро (u, v), такова че $u \in V_1$ и $v \in V_2$. Ще докажем, че за всеки два върха x и y съществува както път от x до y, така и път от y до x. Прочее, достатъчно е да докажем, че $\forall x \in V$ съществува път от x до всеки връх $y \in V$.

Нека $x \in V$ е произволен. Нека A е множеството от върховете, такива че има път от x до всеки от тях; с други думи, A се състои точно от върховете, достижими от x. Да допуснем, че $A \neq V$. Тогава V има разбиване $\{A, V \setminus A\}$, като $x \in A$. Но по прежде направеното допускане, за среза $\{A, V \setminus A\}$ е вярно, че съществува $u \in A$ и $v \in V \setminus A$, такива че (u, v) е ребро на графа. Но щом u е достижим от x и има ребро (u, v), то и връх v е достижим от x и би трябвало да е в A, а не във $V \setminus A$. Полученото противоречие показва, че последното направено допускане, а именно, че $A \neq V$, е погрешно. Заключаваме, че $A = V$, от което веднага следва, че G е силно свързан. □

Задача 5. Нека A, B и C са множества. Нека $f : A \to B$ е сюрекция, а $g : B \to C$ **не е** инекция. Дали $g \circ f$ е инекция? Обосновете много добре отговорите си.

Решение. Ще докажем, че $g \circ f$ не е инекция.

Щом g не е инекция, съществуват b_1 и b_2 в B, такива че $b_1 \neq b_2$ и $g(b_1) = g(b_2)$. Щом f е сюрекция, съществуват a_1 и a_2 в A, такива че $f(a_1) = b_1$ и $f(a_2) = b_2$. Щом f е функция и $b_1 \neq b_2$, вярно е, че $a_1 \neq a_2$.

Да разгледаме $g \circ f$. В сила е $g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(b_1)$ и $g \circ f(a_2) = g(f(a_2)) = g(b_2)$. Но $g(b_1) = g(b_2)$ по конструкция, така че $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$ за различни a_1 и a_2. Заключаваме, че $g \circ f$ не е инекция. $\square$

Задача 6. Намерете броя на целите положителни числа, по-малки от 1001, всяко от които е кратно на поне един елемент на $\{4, 6, 15\}$. Дайте отговор-число.

Решение. Нека $A = \{1, 2, \ldots, 1000\}$. Търси се броят на елементите на A, които се делят на поне едно от 4, 6, 15. Да дефинираме тези три множества:

$$\begin{aligned} S_4 &= \{x \in A \mid x \text{ се дели на } 4\} \\ S_6 &= \{x \in A \mid x \text{ се дели на } 6\} \\ S_{15} &= \{x \in A \mid x \text{ се дели на } 15\} \end{aligned}$$

Търсим $|S_4 \cup S_6 \cup S_{15}|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|S_4 \cup S_6 \cup S_{15}| = |S_4| + |S_6| + |S_{15}| - (|S_4 \cap S_6| + |S_4 \cap S_{15}| + |S_6 \cap S_{15}|) + |S_4 \cap S_6 \cap S_{15}|$$

Да пресметнем всяко от седемте събираеми вдясно. Ползваме без доказателство тези два факта:

- ако n и m са цели положителни, то точно $\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ числа от $\{1, \ldots, n\}$ се делят на m[†].
- ако n, m_1, m_2, …, m_k са цели положителни, то точно $\left\lfloor \frac{n}{\text{НОК}(m_1, m_2, \ldots, m_k)} \right\rfloor$ числа от $\{1, \ldots, n\}$ се делят и на m_1, и на m_2, …, и на m_k.

Тогава

$$\begin{aligned} |S_4| &= 250, \text{ тъй като } \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250 \\ |S_6| &= 166, \text{ тъй като } \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \\ |S_{15}| &= 66, \text{ тъй като } \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66 \\ |S_4 \cap S_6| &= 83, \text{ тъй като } \text{НОК}(4, 6) = 12 \text{ и } \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83 \\ |S_4 \cap S_{15}| &= 16, \text{ тъй като } \text{НОК}(4, 15) = 60 \text{ и } \left\lfloor \frac{1000}{60} \right\rfloor = 16 \\ |S_6 \cap S_{15}| &= 33, \text{ тъй като } \text{НОК}(6, 15) = 30 \text{ и } \left\lfloor \frac{1000}{30} \right\rfloor = 33 \\ |S_4 \cap S_6 \cap S_{15}| &= 16, \text{ тъй като } \text{НОК}(4, 6, 15) = 60 \text{ и } \left\lfloor \frac{1000}{60} \right\rfloor = 16 \end{aligned}$$

Тогава

$$|S_4 \cup S_6 \cup S_{15}| = 250 + 166 + 66 - (83 + 16 + 33) + 16 = 482 - 132 + 16 = 366$$

□

[†] Заслужава да се отбележи, че това е вярно дори когато $m > n$; в такъв случай формулата дава нула, което е коректно.

Задача 7. Нека $G = (V, E)$ е неориентиран граф. Докажете, че ребрата на G може да бъдат ориентирани по такъв начин, че за всеки връх $v \in V$ да е изпълнено $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$.

Решение. БОО, нека G е свързан. Ако G не е свързан, следните разсъждения може да се направят за всяка свързана компонента поотделно. И така, G е свързан.

Нека $V_o = \{v \in V \,|\, d(v) \text{ е нечетно}\}$. От лекции знаем, че $|V_o|$ е четно. Разбиваме V_o по произволен начин на двуелементни множества и за всяко такова множество $\{x, y\}$ добавяме едно неориентирано ребро (x, y) към G. При това G може се превърне в мултиграф, понеже неориентирано ребро (x, y) може да е имало поначало. Нека E' е множеството от добавените ребра[†], като смятаме, че $E \cap E' = \emptyset$, тоест, добавените ребра не просто се идентифицират с краищата си, а си имат свои идентичности, точно както е при мултиграфите.

Нека полученият мултиграф е G' с върхове V и ребра $E \cup E'$. Очевидно, всеки връх в G' е от четна степен. Тогава G' е свързан мултиграф, в който всеки връх е от четна степен. Съгласно изучаваното на лекции, в G' има Ойлеров цикъл C.

Даваме ориентация на ребрата на G' съгласно C. Това означава, че разглеждаме C като алтернираща редица от върхове и ребра, започваща с връх и завършваща с връх, и то с един и същи връх, точно както е по формалната дефиниция на "цикъл". Стартирайки от началния връх на C в посока надясно, за всяко ребро e, което срещаме, ако e се среща в контекста x, e, y, където $x, y \in V$, даваме на e ориентация от x към y; тоест, превръщаме e от неориентирано ребро с краища x и y в ориентирано ребро с начало връх x и край връх y. Тъй като C съдържа всяко ребро на G' точно веднъж, сигурни сме, че всяко ребро ще получи ориентация точно веднъж и не може да се получи конфликт заради две противоположни ориентации на едно и също ребро.

Нека така полученият ориентиран граф е $\widetilde{G}$. Нека $\widetilde{C}$ е ориентираният цикъл, съответен на C в смисъл, че, заменяйки всяко неориентирано ребро в C с ориентирано ребро, получаваме $\widetilde{C}$. Очевидно поредицата от върховете е една и съща в C и в $\widetilde{C}$. Първото ключово наблюдение е, че за всеки връх $v \in V : d^+_{\widetilde{G}}(v) = d^-_{\widetilde{G}}(v)$. Доказателството е елементарно: проследявайки $\widetilde{C}$ отляво надясно, на всяко "излизане" от връх съответства биективно едно "влизане" в същия връх, като "излизането" допринася единица към d^+, а влизането допринася единица към d^-. Щом има биекция между "излизанията" и "влизанията",

$$\forall v \in V : d^+_{\widetilde{G}}(v) = d^-_{\widetilde{G}}(v) \tag{8}$$

Нека $\widetilde{E}$ е множеството от ориентираните ребра на $\widetilde{G}$, които се получиха от ребрата на E' чрез даване на ориентация. Нека $\widehat{G} = \widetilde{G} - \widetilde{E}$. Тоест, $\widehat{G}$ е оригиналният граф G, но с ориентирани ребра, като всяко ребро има ориентацията, която е имало в $\widetilde{G}$. Накратко, $\widehat{G}$ е оригиналният граф G, но с ориентирани ребра.

Второто ключово наблюдение е, че при добавянето на неориентираните ребра от E' към оригиналния неориентиран G, за всеки връх $v \in G$ съществува най-много едно ребро от E', инцидентно с v. От това и (8) веднага следва, че в ориентирания $\widehat{G}$, за всеки връх v е вярно точно едно от тези:

- $d^+_{\widehat{G}}(v) = d^-_{\widehat{G}}(v)$.
- $d^+_{\widehat{G}}(v) = d^-_{\widehat{G}}(v) + 1$.
- $d^+_{\widehat{G}}(v) = d^-_{\widehat{G}}(v) - 1$.

Накратко, $\forall v \in V : |d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$. Което и трябваше да покажем. □

[†] Очевидно $|E'| = \frac{|V_o|}{2}$.