Домашно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика,
летен семестър 2014г.

ТЕМА: МНОЖЕСТВА. ЛОГИКА
РЕШЕНИЯ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Макс.**
получени точки							
от максимално	12	12	15	17	15	20	80

Задача 1: (12т.) Дадени са универсалното множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и пет негови подмножества $A = \{x|x \leq 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 3, 5, 6\}$, $D = \{x|x-$**просто**$\}$ и $E = \{1, 2, 6, 7\}$. Напишете в явен вид всяко от множествата:

а) (2т.) $C \triangle (A \cap B)$

<u>Решение:</u>

$C \triangle (A \cap B) = \{1, 3, 5, 6\} \triangle \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

б) (3т.) $((C \cap D) \cup \overline{E}) \times (E \cap \overline{D})$

<u>Решение:</u>

$((C \cap D) \cup \overline{E}) \times (E \cap \overline{D}) = (\{3, 5\} \cup \{3, 4, 5\}) \times (\{1, 2, 6, 7\} \cap \{1, 4, 6\}) =$
$= \{3, 4, 5\} \times \{1, 6\} = \{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$

в) (4т.) $2^D \setminus (2^{\overline{B}} \triangle 2^{A \cap C})$

<u>Решение:</u>

$2^D \setminus (2^{\overline{B}} \triangle 2^{A \cap C}) = 2^{\{2,3,5,7\}} \setminus (2^{\{1,3,7\}} \triangle 2^{\{1,3\}}) =$
$= 2^{\{2,3,5,7\}} \setminus (\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{7\}, \{1, 3\}, \{1, 7\}, \{3, 7\}, \{1, 3, 7\}\} \triangle \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}) =$
$= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\},$
$\{2, 3, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\}\} \setminus \{\{7\}, \{1, 7\}, \{3, 7\}, \{1, 3, 7\}\} =$
$= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 5\}, \{5, 7\}, \{2, 3, 5\},$
$\{2, 3, 7\}\underline{, \{2, 5, 7\}, \{3, 5, 7\},} \{2, 3, 5, 7\}\}$

г) (3т.) $\overline{D \setminus ((A \cup C) \setminus B)}$

<u>Решение:</u>

$\overline{D \setminus ((A \cup C) \setminus B)} = \overline{\{2, 3, 5, 7\} \setminus (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 5, 6\})} =$
$= \overline{\{2, 3, 5, 7\} \setminus \{1, 3\}} = \overline{\{2, 5, 7\}} = \{1, 3, 4, 6\}$

Задача 2: (12т.) Използвайки табличния метод, докажете или опровергайте, че $\forall A, B, C \subseteq U\ (((A \triangle C) \setminus (A \cap \overline{C})) \cup ((B \triangle C) \setminus (B \cap \overline{C})) = C \cap \overline{B \cap A})$.

Решение:

			P	Q	R	S	T	U	(1)	V	(2)
A	B	C	$A \triangle C$	$A\cap \overline{C}$	$P \setminus Q$	$B \triangle C$	$B\cap \overline{C}$	$S \setminus T$	$R \cup U$	$\overline{B \cap A}$	$C \cap V$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Заключение: Твърдението е вярно, защото колони (1) и (2) съвпадат.

Задача 3: (15т.) Нека A, B и C са произволни множества. Докажете или опровергайте, че:

а) (5т.) ако $A \nsubseteq B$ и $A \cap C = \oslash$, то $A \cup C \nsubseteq B \cup C$.

Решение:

Трябва да докажем, че съществува елемент $x \in A \cup C \wedge x \notin B \cup C$.

Ще използваме даденото в условието: $A \nsubseteq B$, от което следва, че съществува елемент $x \in A \wedge x \notin B$. Но тъй като $A \cap C = \oslash$, то $x \notin C$.

И така, елементът $x \in A \Rightarrow x \in A \cup C$.

Освен това $x \notin B \wedge x \notin C \Rightarrow x \notin B \cup C$.

От което следва, че $A \cup C \nsubseteq B \cup C$

б) (5т.) ако $A \cap C \neq \oslash$ и $B \cap C = \oslash$, то $A \setminus B \neq \oslash$

Решение:

Трябва да докажем, че съществува елемент $x \in A \wedge x \notin B$.

Ще използваме даденото в условието: $A \cap C \neq \oslash$, от което следва, че съществува елемент $x \in A \wedge x \in C$. Но тъй като $B \cap C = \oslash$, то $x \notin B$.

И така, елементът $x \in A \wedge x \notin B$.

Следователно $x \in A \setminus B$

в) (5т.) $2^{A \cup B} = 2^A \cup 2^B$

Решение:

Твърдението не е вярно. Ще го докажем със следния контрапример:

Да разгледаме множествата $A = \{a, b\}$ $B = \{b, c\}$

$2^{A \cup B} = 2^{\{a,b,c\}} = \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

$2^A \cup 2^B = 2^{\{a,b\}} \cup 2^{\{b,c\}} =$

$= \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \cup \{\oslash, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\} =$

$= \{\oslash, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$

И така $\{a,c\} \in 2^{A\cup B} \wedge \{a,c\} \notin 2^A \cup 2^B$
Следователно $2^{A\cup B} \neq 2^A \cup 2^B$

Задача 4: (17т.) Дадени са предикатите:
$p(x) : x \geq 0$
$q(x) : x^2 \geq 0$
$r(x) : x^2 - 3x - 4 = 0$
$s(x) : x^2 - 3 > 0$
с домейн $\mathbb{R}$. Докажете или опровергайте, че:
а) (3т.) $\exists x(p(x) \wedge r(x))$
Решение: Твърдението е вярно, защото за $x = 4$
$p(4) \wedge r(4) = (4 \geq 0) \wedge (4^2 - 3 \times 4 - 4 = 0) = T \wedge T = T.$
б) (5т.) $\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$
Решение: Нека $x \in \mathbb{R}$.
Ако $x < 0$, то $p(x) \rightarrow q(x) = (x \geq 0) \rightarrow (x^2 \geq 0) = F \rightarrow T = T.$
Ако $x \geqq 0$, то $p(x) \rightarrow q(x) = (x \geq 0) \rightarrow (x^2 \geq 0) = T \rightarrow T = T.$
Следователно, $p(x) \rightarrow q(x)$ е вярно за всяко $x \in \mathbb{R}$.
Следователно, твърдението е вярно.
в) (3т.) $\forall x(q(x) \rightarrow s(x))$
Решение: Твърдението не е вярно. Контрапример: за $x = 0$
$q(0) \rightarrow s(0) = (0^2 \geq 0) \rightarrow (0^2 - 3 > 0) = T \rightarrow F = F.$
г) (3т.) $\forall x(r(x) \vee s(x))$
Решение: Твърдението не е вярно. Контрапример: за $x = 1$
$r(1) \vee s(1) = ((1^2 - 3 \times 1 - 4 = 0) \vee (1^2 - 3 > 0) = F \vee F = F.$
д) (3т.) $\forall x(r(x) \rightarrow p(x))$
Решение: Твърдението не е вярно. Контрапример: за $x = -1$
$r(-1) \rightarrow p(-1) = (((-1)^2 - 3 \times (-1) - 4 = 0) \rightarrow ((-1) \geq 0) =$
$= T \rightarrow F = F.$

Задача 5: (15т.) Разгледайте следната формулировка на известната
Теорема на Ферма Уравнението $x^n + y^n = z^n$ няма решение в положителни цели числа при $n > 2$.

а) (5т.) Напишете дефиницията на езика на предикатната логика като дефинирате подходящи предикати;

Решение:
$\forall n > 2(\forall (x,y,z) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+(x^n + y^n \neq z^n))$

Или ако вземем предвид други познати факти, може да формулираме така:
$\forall n \in \mathbb{N}^+((\exists (x,y,z) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+(x^n + y^n = z^n)) \iff n \leq 2)$

б) (5т.) Напишете отрицанието на дефиницията на български език;

Решение:

Съществува естествено число $n > 2$, за което уравнението $x^n + y^n = z^n$ има решение в положителни цели числа.

в) (5т.) Напишете отрицанието на дефиницията на езика на предикатната логика.

Решение:

$\exists n > 2(\exists (x, y, z) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ (x^n + y^n = z^n))$

Задача 6: (20т.) В магазин за мобилни телефони, в деня на промоцията на новия модел, при отварянето му влезли наведнъж 71 човека. Те всички се познавали помежду си, а управителят знаел, че между тях има честни, които нито крадат, нито лъжат и разбойници, които крадат и лъжат. Той обещал за всички да има по един от новите телефони и помолил всеки от посетителите да напусне, ако няма намерение да си го плати. Управителят получил един и същи отговор от всеки: "Ако аз изляза сега, след това броят на откраднатите апарати ще бъде по-голям от броя на платените."

Колко телефона са платени на края?

Решение:

Да означим с x броя на платените телефони. Тъй като честните клиенти не крадат, то всеки от тях ще плати телефона си, т.е. техният брой също е x. Тогава броят на разбойниците е $71 - x$, а толкова ще бъде и броят на откраднатите телефони. Честните хора казват истината, т.е. ако излезе честен клиент, то броят на крадците ще е по-голям от броя на останалите честни:

$71 - x > x - 1 \;\Rightarrow x < 36$

Твърдението на всеки от лъжците е същото, че ако той излезе лъжците ще бъдат повече от честните:

$70 - x > x \;\Rightarrow x < 35$

Но истината е, че е вярно обратното, т.е. $x \geq 35$

И така:

$(x < 36 \wedge x \geq 35) \Rightarrow x = 35$

което е и търсеният отговор.