Първо малко контролно по ДАА

Решения на задачите на първа група, Информатика

Задача 1. Подредете функциите по асимптотично нарастване:

$$\binom{n}{3} \qquad n^{\frac{1}{\lg n}} \qquad n! \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 \qquad n^{\lg^2 n}$$

Решение:

Нека $f_1 = \binom{n}{3}$, $f_2 = n^{\frac{1}{\lg n}}$, $f_3 = n!$, $f_4 = \sum_{i=1}^{n} i^2$, $f_5 = n^{\lg^2 n}$. Да опростим функциите:

$$f_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \asymp n^3$$

$$f_2 = n^{\log_n 2} = 2 \asymp 1$$

$$f_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \asymp n^3$$

Да сравним f_2 и f_1: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_2}{f_1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \Rightarrow f_2 \prec f_1$. (1 т.)

Очевидно $f_1 \asymp f_4$. (1 т.)

Да сравним f_4 и f_5 с логаритмуване: (2 т.)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg f_4}{\lg f_5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n^3}{\lg n^{\lg^2 n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3\lg n}{\lg^3 n} = 3 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lg^2 n} = 0 \Rightarrow \lg f_4 \prec \lg f_5 \Rightarrow f_4 \prec f_5$.

Да сравним f_5 и f_3 с логаритмуване:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg f_5}{\lg f_3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg n^{\lg^2 n}}{\lg n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg^3 n}{n \lg n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lg^2 n}{n} = 0 \Rightarrow \lg f_5 \prec \lg f_3 \Rightarrow f_5 \prec f_3$. (2 т.)

Окончателно: $f_2 \prec f_1 \asymp f_4 \prec f_5 \prec f_3$.

Задача 2. Даден е алгоритъм `ALG-1`, чийто вход е масив `A[1,2,…,n]` от цели числа. Докажете, че алгоритъмът връща:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}.A[i]$$

```
ALG-1(A[1,2,…n]:integers)
 1  s⟵ 0, p ⟵ 1
 2  for i ⟵ 1 to n
 3      s ⟵ s + p * A[i]
 4      p ⟵ p * 2
 5
 6  return s
```

Решение:

Формулираме следната инварианта:

Всеки път, когато достигаме до ред 2, $s = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j]$ и $p = 2^{i-1}$. (2 т.)

База При първото достигане на ред 2 $i = 1$, $s = 0 = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j]$ и $p = 1 = 2^{i-1}$. ✓

(2 т.)

Поддръжка Допускаме, че твърдението е в сила за някое достигане на ред 2, което не е последно. Тогава от допускането имаме $s = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j]$ и $p = 2^{i-1}$. След присвояването на ред 3 имаме:

$s = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j] + p.A[i] = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j] + 2^{i-1}.A[i] = \sum_{j=1}^{i} 2^{j-1}.A[j]$.

След присвояването на ред 4 имаме $p = 2.2^{i-1} = 2^i$.

При следващото достигане на ред 2 i се увеличава с единица. Така относно новото i имаме: $s = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j]$ и $p = 2^{i-1}$. ✓

(2 т.)

Терминация При последното достигане на ред 2 $i = n + 1$. От допускането имаме:

$s = \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}.A[j]$. Следователно $s = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}.A[j]$.

(2 т.)

Задача 3. Решете рекурентните отношения:

а) $\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(n-1) + 2n - 1$
б) $\mathrm{T}(n) = 16\mathrm{T}\left(\frac{n}{8}\right) + n\sqrt{n}$
в) $\mathrm{T}(n) = 3\mathrm{T}(n-1) + n.2^n$
г) $\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(n-1) + \frac{n}{n-1}$

Решение:

а) Ще решим задачата с развиване:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &= \mathrm{T}(n-1) + 2n - 1\\
\mathrm{T}(n-1) &= \mathrm{T}(n-2) + 2(n-1) - 1\\
\mathrm{T}(n-2) &= \mathrm{T}(n-3) + 2(n-2) - 1\\
&\vdots\\
\mathrm{T}(2) &= \mathrm{T}(1) + 2.2 - 1\\
\mathrm{T}(1) &\asymp 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}(n) \asymp 2n - 1 + 2(n-1) - 1 + 2(n-2) - 1 + \cdots + 2.2 - 1 + 1 =$$
$$= 2\sum_{i=2}^{n} i - (n-1).1 + 1 = 2.\frac{(n-1)(n+2)}{2} - n + 2 = n^2 + n - 2 - n + 2 = n^2$$

(2 т.)

б) Ще решим задачата като използваме Master-теоремата:

$a = 16$, $b = 8$

$k = \log_b a = \log_8 16 = \log_8 2^4 = 4\log_8 2 = 4.\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

$f(n) = n\sqrt{n} = n^{\frac{3}{2}}$

$n^k = n^{\frac{4}{3}}$

Очевидно $f(n) = \Omega(n^{k+\varepsilon})$ за $\varepsilon = \frac{1}{10}$ например. Търсим константа $0 < c < 1$, такава че $a.f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c.f(n)$, т.е. $.16.\frac{n}{8}\sqrt{\frac{n}{8}} \leq c.n\sqrt{n}$. След съкращения получаваме $c \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, да вземем например $c = \frac{3}{4}$. В третия случай на Master-теоремата сме, следователно:

$\mathrm{T}(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\sqrt{n})$.

(2 т.)

в) Ще решим задачата като използваме метода с характеристичното уравнение:

От хомогенната част имаме: $x - 3 = 0$, т.е. $x_1 = 3$ следователно корените са $\{3\}_M$. От нехомогенната част имаме $\{2,2\}_M$. Окончателно, корените са $\{2,2,3\}_M$. Тогава:

$\mathrm{T}(n) = A.2^n + Bn.2^n + C.3^n \asymp 3^n$.

(2 т.)

г) Ще решим задачата с развиване:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(n) &= \mathrm{T}(n-1) + \frac{n}{n-1}\\
\mathrm{T}(n-1) &= \mathrm{T}(n-2) + \frac{n-1}{n-2}\\
\mathrm{T}(n-2) &= \mathrm{T}(n-3) + \frac{n-2}{n-3}\\
&\vdots\\
\mathrm{T}(2) &= \mathrm{T}(1) + \frac{2}{1}\\
\mathrm{T}(1) &\asymp 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{T}(n) \asymp \frac{n}{n-1} + \frac{n-1}{n-2} + \frac{n-2}{n-3} + \cdots + \frac{2}{1} + 1 =$$
$$= \frac{n-1+1}{n-1} + \frac{n-2+1}{n-2} + \frac{n-3+1}{n-3} + \cdots + \frac{n-(n-1)+1}{1} + 1 =$$
$$= 1 + \frac{1}{n-1} + 1 + \frac{1}{n-2} + 1 + \frac{1}{n-3} + \cdots + 1 + \frac{1}{1} + 1 =$$
$$= n.1 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i} \asymp n + \lg(n-1) \asymp n$$

(2 т.)