Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, 08.05.2014г.

Вариант I

Задача 1: (8т.) Използвайте таблица на истинност, за да проверите дали следните логически изрази са еквивалентни:

$(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$

Решение:

p	q	r	$p \wedge q$	$A = (p \wedge q) \to r$	$p \wedge \neg r$	$B = (p \wedge \neg r) \to \neg q$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	F	T	T

Изразите са еквивалентни, тъй като $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

Задача 2: (15т.) Да означим с S следното твърдение: Произволна програма на Java, ако е синтактически коректна, то тя се компилира без съобщения за грешки.

а) Формулирайте отрицанието на S. Кое твърдение е вярно: S или $\neg S$;

Решение: Отрицанието на S гласи следното: Съществува програма на Java, която е синтактически коректна, но се компилира със съобщения за грешки. Вярното от двете твърдения е S.

б) Формулирайте по подходящ начин предикати $P(x)$ и $Q(x)$, за да запишете S и $\neg S$ на езика на предикатната логика.

Решение: Да означим с D множеството, състоящо се от всички възможни програми на Java и нека следните предикати са с домейн D:

$P(x):$ x е синтактически коректна

$Q(x):$ x се компилира без съобщения за грешки

Тогава твърденията S и $\neg S$ можем да запишем така:

$S: \ \forall x (P(x) \to Q(x))$

$\neg S: \ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Задача 3: (12т.) Дадени са универсалното множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и четири негови подмножества $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ и $D = \{1, 3, 5\}$. Напишете в явен вид всяко от множествата:

а) (1т.) $A \cup B$

б) (1т.) $C \cap D$

в) (1т.) $A \triangle B$

г) (1т.) $A \cap (B \cup C \cup D)$

д) (1т.) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$
е) (1т.) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
ж) (1т.) $(C \setminus A) \triangle D$
з) (2т.) $2^A \cap 2^B$
и) (3т.) $2^D \setminus 2^C$

Решение:
а) (1т.) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$
б) (1т.) $C \cap D = \{3, 5\}$
в) (1т.) $A \triangle B = \{2, 6\}$
г) (1т.) $A \cap (B \cup C \cup D) = \{2, 4, 8\}$
д) (1т.) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = \{2, 6, 7\}$
е) (1т.) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \{4, 8\}$
ж) (1т.) $(C \setminus A) \triangle D = \{1, 7\}$
з) (2т.) $2^A \cap 2^B = \{\emptyset, \{4\}, \{8\}, \{4, 8\}\}$
и) (3т.) $2^D \setminus 2^C = \{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

Задача 4: (12т.) Функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана, както следва:

$$f(n) = \begin{cases} 3 & \text{ако } n = 1 \\ \\ f(n-1) + (4n-1) & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

Докажете по индукция, че $f(n) = n(2n + 1)$ за всяко естествено число $n \geq 1$.

Решение: Нека $P(n) : f(n) = n(2n + 1)$.

1. Доказателство, че $P(1)$ е вярно: $f(1) = 3$ и $1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 3$ - вярно

2. Допускаме, че $P(k) : f(k) = k(2k + 1)$ е вярно за някакво естествено число $k \geq 1$.

3. Доказателство, че $P(k + 1) : f(k + 1) = (k + 1)(2k + 3)$ е вярно:

   $k \geq 1 \Rightarrow k + 1 \geq 2 \Rightarrow f(k + 1) = f(k) + (4k + 3) = k(2k + 1) + (4k + 3) =$

   $= 2k^2 + 5k + 3 \quad (1)$

   $(k + 1)(2k + 3) = 2k^2 + 5k + 3 \quad (2)$

   От (1) и (2) следва, че $P(k + 1)$ е вярно.

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \geq 1$.

Задача 5: (15т.) Релацията $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е дефинирана по следния начин:
$R = \{(x, y) : 4|(x + 3y)\}$
Докажете, че R е релация на еквивалентност и опишете класовете на еквивалентност.

Решение: Ще проверим дали релацията притежава свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност.

1. *Рефлексивност:* Нека x е произволен елемент на домейна $\mathbb{Z}$. Двойката (x, x) принадлежи на релацията точно тогава, когато $4|(x + 3x)$, което очевидно е вярно. Следователно, релацията е рефлексивна.

2. *Симетричност:* Нека x и y са два произволни елемента на домейна $\mathbb{Z}$, които са в релация. Следователно, $4|x + 3y$, т.е. $\exists k \in \mathbb{Z} : x + 3y = 4k$. За да проверим принадлежността на двойката (y, x) към релацията ще изследваме дали $4|y + 3x$.

$y + 3x = (4x + 4y) - (x + 3y) = 4(x + y) - 4k = 4(x + y - k) = 4p,\ p \in \mathbb{Z}$

Следавателно $4|y + 3x$, т.е. $(y, x) \in R$

Следователно релацията е симетрична.

3. *Транзитивност:* Нека x, y и z са три произволни елемента на домейна $\mathbb{Z}$, такива че $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$. Ще проверим дали от това следва, че $(x, z) \in R$.

$(x, y) \in R \Rightarrow 4|x + 3y \Rightarrow x + 3y = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$

$(y, z) \in R \Rightarrow 4|y + 3z \Rightarrow y + 3z = 4r,\ r \in \mathbb{Z}$

$x + 3z = (x + 3y) + (y + 3z) - 4y = 4k + 4r - 4y = 4(k + r - y) = 4p,\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$4|x + 3z \Rightarrow (x, z) \in R$

От това следва, че релацията е транзитивна.

И така, релацията R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност.

Класовете на еквивалентност на релацията са:

$R_{[0]} = \{x : x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[1]} = \{x : x = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[2]} = \{x : x = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[3]} = \{x : x = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}\}$

Задача 6: (15т.) Три книжарници продават учебна литература по информатика. В издателство са подготвени четири нови книги. Един доставчик е натоварен да разнесе 400 книги - по 100 екземпляра от всяка. Той изпълнил задачата, но на различните места оставил различен брой екземпляри, като не запомнил къде по колко точно. Сигурно ли е, че както и да е разпределил книгите, то в някоя от книжарниците е оставил поне по 34 екзимпляра на две от книгите?

Решение: Ще приложим принципа на Дирихле двукратно.

Първо да разгледаме една от новоиздадените книги. Тя е в 100 екземпляра и се разпределя в 3 книжарници. Тъй като $100 = 3 \cdot 33 + 1$, то съгласно обобщения принцип на Дирихле, ще има книжарница, в която са оставени поне 34 екзимпляра. Това важи за всяка от четирите нови книги, а те се разпределят в 3 книжарници, така че според принципа на Дирихле ще има книжарница, в която се попаднали поне 34 екземпляра от две от книгите.

Задача 7: (15т.) Да се определи броят на числата, които се получават чрез разместване на цифрите на числото 231458967, всяко от които не съдържа никое от числата $735, 24$ и 6189.

Решение: Нека U е множеството от всички числа, които се получават чрез разместване на цифрите, $A_1 \subseteq U$ - множеството от числа, които съдържат 735, $A_2 \subseteq U$ - множеството от числа, които съдържат 24, $A_3 \subseteq U$ - множеството от числа, които съдържат 6189. Тогава, числата, чиито брой търсим, са елементите на множеството $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ и съгласно Принципа на включването и изключването техният

брой е: $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| =$
$= |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$
$= 9! - (7! + 8! + 6!) + (6! + 4! + 5!) - 3!.$