Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, 08.05.2014г.

Вариант II

Задача 1: (8т.) Използвайте таблица на истинност, за да проверите дали следните логически изрази са еквивалентни:

$(p \wedge q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

<u>Решение:</u>

p	q	r	$p \wedge q$	$A = (p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$B = p \to (q \to r)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T

Изразите са еквивалентни, тъй като $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

Задача 2: (15т.) Да означим с S следното твърдение: Всяка програма на Java или е синтактично коректна, или се компилира със съобщения за грешки.

а) Формулирайте отрицанието на S. Кое твърдение е вярно: S или $\neg S$;

<u>Решение:</u> Отрицанието на S гласи следното: Съществува програма на Java, която е синтактично коректна тогава и само тогава, когато се компилира със съобщения за грешки. Вярното от двете твърдения е S.

б) Формулирайте по подходящ начин предикати $P(x)$ и $Q(x)$, за да запишете S и $\neg S$ на езика на предикатната логика.

<u>Решение:</u> Да означим с D множеството, състоящо се от всички възможни програми на Java и нека следните предикати са с домейн D:

$P(x):$ x е синтактично коректна

$Q(x):$ x се компилира със съобщения за грешки

Тогава твърденията S и $\neg S$ можем да запишем така:

$S: \; \forall x (P(x) \oplus Q(x))$

$\neg S: \; \exists x (P(x) \leftrightarrow Q(x))$

Задача 3: (12т.) Дадени са универсалното множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и четири негови подмножества $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ и $D = \{1, 2, 4\}$. Напишете в явен вид всяко от множествата:

а) (1т.) $A \cup B$

б) (1т.) $C \cap D$

в) (1т.) $B \triangle C$

г) (1т.) $\overline{A} \cap \overline{B \cap D}$

д) (1т.) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$
е) (1т.) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}$
ж) (1т.) $(C \setminus A) \triangle D$
з) (2т.) $2^A \cap 2^B$
и) (3т.) $2^D \setminus 2^B$

Решение:
а) (1т.) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
б) (1т.) $C \cap D = \{4\}$
в) (1т.) $B \triangle C = \{2, 5, 7\}$
г) (1т.) $\overline{A} \cap \overline{B \cap D} = \{1, 7, 8\}$
д) (1т.) $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = \{3, 5, 6, 7, 8\}$
е) (1т.) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}} = \{4, 6\}$
ж) (1т.) $(C \setminus A) \triangle D = \{1, 2, 4, 7, 8\}$
з) (2т.) $2^A \cap 2^B = \{\emptyset, \{4\}, \{6\}, \{4, 6\}\}$
и) (3т.) $2^D \setminus 2^B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}\}$

Задача 4: (12т.) Функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана, както следва:

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{ако } n = 1 \\ \\ f(n-1) + (4n-2) & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

Докажете по индукция, че $f(n) = 2n^2$ за всяко естествено число $n \geq 1$.

Решение: Нека $P(n) : f(n) = 2n^2$.

1. Доказателство, че $P(1)$ е вярно: $f(1) = 2$ и $2 \cdot 1^2 = 2$ - вярно

2. Допускаме, че $P(k) : f(k) = 2k^2$ е вярно за някакво естествено число $k \geq 1$.

3. Доказателство, че $P(k+1) : f(k+1) = 2(k+1)^2$ е вярно:
   $k \geq 1 \Rightarrow k + 1 \geq 2 \Rightarrow f(k+1) = f(k) + (4k+2) = 2k^2 + (4k+2) =$
   $= 2(k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^2$

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \geq 1$.

Задача 5: (15т.) Релацията $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е дефинирана по следния начин:
$R = \{(x, y) : 3|(2x - 5y)\}$
Докажете, че R е релация на еквивалентност и опишете класовете на еквивалентност.

Решение: Ще проверим дали релацията притежава свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност.

1. *Рефлексивност:* Нека x е произволен елемент на домейна $\mathbb{Z}$. Двойката (x, x) принадлежи на релацията точно тогава, когато $3|(2x - 5x)$, което очевидно е вярно. Следователно, релацията е рефлексивна.

2. *Симетричност:* Нека x и y са два произволни елемента на домейна $\mathbb{Z}$, които са в релация. Следователно, $3|2x - 5y$, т.е. $\exists k \in \mathbb{Z} : 2x - 5y = 3k$. За да проверим принадлежността на двойката (y, x) към релацията ще изследваме дали $3|2y - 5x$.

$2y - 5x = (-3x - 3y) - (2x - 5y) = 3(-x - y) - 3k = 3(-x - y - k) = 3p, p \in \mathbb{Z}$

Следавятелно $3|2y - 5x$, т.е. $(y, x) \in R$

Следователно релацията е симетрична.

3. *Транзитивност:* Нека x, y и z са три произволни елемента на домейна $\mathbb{Z}$, такива че $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$. Ще проверим дали от това следва, че $(x, z) \in Z$.

$(x, y) \in R \Rightarrow 3|2x - 5y \Rightarrow 2x - 5y = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$(y, z) \in R \Rightarrow 3|2y - 5z \Rightarrow 2y - 5z = 3r, r \in \mathbb{Z}$

$2x - 5z = (2x - 5y) + (2y - 5z) + 3y = 3k + 3r + 3y = 3(k + r + y) = 3p, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
$3|2x - 5z \Rightarrow (x, z) \in R$

От това следва, че релацията е транзитивна.

И така, релацията R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, т.е. тя е релация на еквивалентност.

Класовете на еквивалентност на релацията са:

$R_{[0]} = \{x : x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[1]} = \{x : x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$R_{[2]} = \{x : x = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$

Задача 6: (15т.) Келнер подготвя 3 маси за банкет и трябва да ги зареди с 4 вида питиета, като от всяко питие са му дадени по 10 бутилки. Той набързо нарежда бутилките, без да следи къде по колко от всеки вид бутилки слага. Сигурно ли е, че както и да е разпределил питетата, то ще има маса, на която са поставени поне 4 бутилки от два вида питиета?

Решение: Ще приложим принципа на Дирихле двукратно.

Първо да разгледаме бутилките от един вид питие. Те са 10, а масите, на които се нареждат са 3, и тъй като $10 = 3 \cdot 3 + 1$, то съгласно обобщения принцип на Дирихле, ще има маса, на която са поставени поне 4 бутилки. Това се отнася за всеки от видовете питиета, но тъй като те са 4, а масите са три, то според принципа на Дирихле ще има маса, на която ще се окажат въпросните 4 бутилки от два вида питиета.

Задача 7: (15т.) Да се определи броят на думите, които се получават чрез разместване на буквите на думата $successful$, всяка от които не съдържа никоя от думите elf, sss и cc.

Решение: Нека U е множеството от всички думи, които се получават чрез разместване на буквите, $A_1 \subseteq U$ - множеството от думи, които съдържат elf, $A_2 \subseteq U$ - множеството от думи, които съдържат sss, $A_3 \subseteq U$ - множеството от думи, които съдържат cc. Тогава, думите, чиито брой търсим, са елементите на множеството $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ и съгласно Принципа на включването и изключването техният брой е: $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| =$

$= |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$

$= \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} - (\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} + \frac{8!}{2! \cdot 2!} + \frac{9!}{3! \cdot 2!}) + (\frac{6!}{2! \cdot 2!} + \frac{7!}{3! \cdot 2!} + \frac{7!}{2!}) - \frac{5!}{2!}.$