Домашно №3 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2014г.

---

# ТЕМА: КОМБИНАТОРИКА. РЕКУРЕНТНИ ОТНОШЕНИЯ

---

**Задача 1:** (15т.) В кутия са поставени по 10 топки от три цвята: бял, зелен, червен. Колко най-малко топки трябва да извадим за да е сигурно, че измежду тях ще има поне 3 бели, или 5 зелени, или 4 червени топки.

<u>Решение:</u> Да допуснем, че при изваждане на топките условието на задачата не е изпълнено, т.е. измежду извадените топки има най-много 2 бели и най-много 4 зелени и най-много 3 червени. Тогава общият брой на извадените топки ще е най-много 9. Следователно, при изваждане на 10 топки условието на задачата ще бъде изпълнено.

**Задача 2:** (15т.) Намерете решението на следното рекурентно отношение с дадените начални условия:

$s_{n+2} - 4s_{n+1} + s_n = 0, \quad n \geq 0$

$s_0 = 1; \; s_1 = 2$

<u>Решение:</u> Характеристичното уравнение на даденото рекурентно отношение е:

$r^2 - 4r + 1 = 0$ и има корени $r_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $r_1 = 2 - \sqrt{3}$

Следователно, общото решение на рекурентното отношение е:

$s_n = A_1(2 + \sqrt{3})^n + A_2(2 - \sqrt{3})^n$

Стойностите на константите $A_1$ и $A_2$, които съответстват на дадените начални условия, определяме като решения на следната система от две уравнения с две неизвестни:

$$\left| \begin{array}{c} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1(2 + \sqrt{3}) + A_2(2 - \sqrt{3}) = 2 \end{array} \right.$$

и те са $A_1 = \dfrac{1}{2}$ и $A_2 = \dfrac{1}{2}$.

Така решението на рекурентното отношение е:

$s_n = \dfrac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \dfrac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n$

**Задача 3:** (15т.) Намерете общото решение на следното рекурентно отношение:

$s_{n+2} - 5s_{n+1} + 6s_n = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad n \geq 0$

<u>Решение:</u> Характеристичното уравнение на даденото рекурентно отношение е:

$r^2 - 5r + 6 = 0$ и има корени $r_1 = 3$ и $r_2 = 2$

Рекурентното отношение е нехомогенно и $f(n) = \dfrac{2}{3} \cdot 3^n$ и тъй като 3 е корен на характеристичното уравнение, то общото решение е:

$s_n = (A_1 + A_2 n) \cdot 3^n + B \cdot 2^n$

**Задача 4:** (20т.) Намерете рекурентно отношение и начални условия за броя на думите над азбуката $A = \{a, b\}$ с дължина $n$, $n \in \mathbb{N}$, всяка от които съдържа три последователни букви $a$. Колко е броят на тези думи с дължина $n = 11$?

Решение: Нека $n \in \mathbb{N}$, $W_n$ е множеството от думи над азбуката $A$ с дължина $n$, $S_n \subseteq W_n$ - множеството от думи, всяка от които съдържа три последователни букви $a$, като $|S_n| = a_n$ и $\varepsilon$ е празната дума. Тогава:

$a_0 = 0$, защото $W_0 = \{\varepsilon\}$, от което следва, че $S_0 = \emptyset$

$a_1 = 0$, защото $W_1 = \{a, b\}$, от което следва, че $S_1 = \emptyset$

$a_2 = 0$, защото $W_2 = \{aa, ab, ba, bb\}$, от което следва, че $S_2 = \emptyset$.

Нека $n \geq 3$. Всяка дума от $S_n$ е от един от следните четири вида:

а) $\omega b, \omega \in S_{n-1}$

б) $\omega ba, \omega \in S_{n-2}$

в) $\omega baa, \omega \in S_{n-3}$

г) $\omega aaa, \omega \in W_{n-3}$

Следователно, $S_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, където $A_1 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида а), $A_2 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида б), $A_3 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида в), $A_4 \subseteq S_n$ - множеството от думи от вида г), като множествата са две по две непресичащи се и съгласно Принципа на събирането $|S_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = |S_{n-1}| + |S_{n-2}| + |S_{n-3}| + |W_{n-3}|$.

И така, получихме следното рекурентно отношение: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + 2^{n-3}$.

Използвайки полученото рекурентно отношение, за броя на думите с дължина $n = 11$, всяка от които съдържа три последователни букви $a$, получаваме 1121.

**Задача 5:** (20т.) По колко начина може да се поставят всичките 50 еднакви топки в 7 различно оцветени кутии - бяла, червена, синя, розова, зелена, жълта, оранжева:

а) (7т.) без ограничения

Решение: *Първи начин:* Всяко разполагане на топките в кутиите е комбинация с повторение от клас $k = 50$, съставена от елементите на множеството от $n = 7$ кутии. Следователно, броят е $\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{56}{6}$.

*Втори начин:* На всяко разполагане на $a_1$ топки в бялата кутия, $a_2$ топки в червената кутия, $a_3$ топки в синята кутия, $a_4$ топки в розовата кутия, $a_5$ топки в зелената кутия, $a_6$ топки в жълтата кутия, $a_7$ топки в оранжевата кутия, като

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 50, a_i \in \mathbb{Z}$

$0 \leq a_i \leq 50, i \in I_7$

еднозначно съответства дума над азбуката $X = \{1, w, r, b, p, g, y, o\}$, с дължина 57, от вида:

$$\underbrace{1...1}_{a_1} w \underbrace{1...1}_{a_2} r \underbrace{1...1}_{a_3} b \underbrace{1...1}_{a_4} p \underbrace{1...1}_{a_5} g \underbrace{1...1}_{a_6} y \underbrace{1...1}_{a_7} o$$

Следователно, броят е $\binom{56}{6}$.

б) (7т.) във всяка от трите кутии - червена, розова и жълта има точно по 10 топки

Решение: *Първи начин:* Поставяме във всяка от трите кутии по 10 топки. Всяко разполагане на останалите 20 топки в останалите 4 кутии е комбинация с повторение от клас $k = 20$, съставена от елементите на множеството от $n = 4$ кутии. Следователно, броят е $\binom{k+(n-1)}{n-1} = \binom{23}{3}$.

*Втори начин:* Броят е всички думи над азбуката $X = \{1, w, r, b, p, g, y, o\}$ с дължина 57 от вида:

$$\underbrace{1...1}_{a_1} w \underbrace{1...1}_{10} r \underbrace{1...1}_{a_3} b \underbrace{1...1}_{10} p \underbrace{1...1}_{a_5} g \underbrace{1...1}_{10} y \underbrace{1...1}_{a_7} o$$

На всяка такава дума еднозначно съответства дума над азбуката $Y = \{1, A, B, C, o\}$ с дължина 24 от вида;

$$\underbrace{1...1}_{a_1} \overbrace{w \underbrace{1...1}_{10} r}^{A} \underbrace{1...1}_{a_3} \overbrace{b \underbrace{1...1}_{10} p}^{B} \underbrace{1...1}_{a_5} \overbrace{g \underbrace{1...1}_{10} y}^{C} \underbrace{1...1}_{a_7} o$$

Следователно, броят е $\binom{23}{3}$.

в) (6т.) в синята кутия има най-много 17 топки

Решение: Нека $U$ е множеството от разполаганията, чийто брой търсим. Тогава $U = \bigcup_{i=0}^{17} A_i$, където $A_i \subseteq U$- множеството от разполагания, при които в синята кутия има $i$ топки, $i \in J_{17}$. Множествата са две по две непресичащи се и съгласно принципа на събирането търсеният брой е $|U| = \sum_{i=0}^{17} |A_i| = \sum_{i=0}^{17} \binom{(50-i)+5}{5}$.

**Задача 6:** (15т.) Дадени са азбуката $A$ от главните латински букви и множеството $B$ от десетичните цифри. Нека $ID$ е множеството от идентификаторите на езика C++, над дадените множества, всеки от които е от един от следните два вида:

а) 10 букви или цифри

б) 5 букви, последвани от 3 цифри, след които има 7 букви

Представете $ID$ чрез множествата $A$ и $B$ и операциите декартово произведение и обединение над тях. Намерете $|ID|$.

Решение: $ID = A_1 \cup A_2$, където $A_1 \subseteq ID$ - множеството от идентификатори от вида а), $A_2 \subseteq ID$ - множеството от идентификатори от вида б) и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Следователно, $ID = (A \times (A \cup B)^9) \cup (A^5 \ltimes B^3 \times A^7)$ и съгласно принципите на умножението и събирането, броят е $|ID| = |(A \times (A \cup B)^9) \cup (A^5 \times B^3 \times A^7)| =$
$= (|A| \cdot (|A| + |B|)^9) + (|A|^5 \cdot |B|^3 \cdot |A|^7) = 26 \cdot 36^9 + 26^{12} \cdot 10^3$

**Задача 7:** (20т.) Дадени са множествата $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ и $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Намерете броя на функциите $f : X \to Y$, за които е изпълнено: $|f(X)| = 4$.

Решение: Тъй като $|f(X)| = 4$, то точно 4 елемента на $Y$ имат първообраз в $X$. За да определим търсения брой функции, трябва първо да намерим броя на 4-елементните подмножества на $Y$ и за всяко от тях да намерим колко са сюрекциите с домейн $X$ и кодомейн съответното 4-елементно подмножество.

Броят на 4-елементните подмножества на $Y$ е $\binom{|Y|}{4} = \binom{6}{4} = 15$.

Броят на сюрекциите с 10-елементен домейн и 4-елементен кодомейн ще изчислим с помощта на принципа за включване и изключване. Да означим с $F_{10,k}$ броя на функциите с 10-елементен домейн и $k$-елементен кодомейн. Техният брой е $k^{10}$. Съгласно принципа за включване и изключване броят на сюрекциите е

$F_{10,4} - \binom{4}{1}F_{10,3} + \binom{4}{2}F_{10,2} - \binom{4}{3}F_{10,1} + \binom{4}{4}F_{10,0} = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i}(4-i)^{10}$.

И така, търсеният брой на функциите от условието на задачата е

$\binom{6}{4} \cdot \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i}(4-i)^{10}$

*Забележка:* Максимален брой точки 100.