Домашно №4 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2014г.

ТЕМА: ГРАФИ. ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Задача 1:(10т.) Намерете броя на ребрата в гора с n върха и k свързани компоненти. *Забележка:* Гора ще наричаме граф без цикли.

Решение: Гората е граф без цикли, следователно всяка свързана компонента на графа е дърво. Нека означим сварзаните компоненти с $G_i(V_i, E_i), i \in I_k$. За броя на ребрата във всяко от тези дървета е в сила равенството $|E_i| = |V_i| - 1$. Следователно броят на ребрата в графа е

$|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k}(|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^{k} |V_i| - k = |V| - k = n - k$

Задача 2:(10т.) Нека $G(V, E)$ е краен неорентиран граф с $n \geq 3$ върха и $k \geq 3$ свързани компоненти. Докажете, че в допълнителния граф на G има триъгълник.

Решение: Нека $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$, $G_3(V_3, E_3)$ са три свързани компоненти на графа G и $a \in V_1$, $b \in V_2$, $c \in V_3$. От това, че G_1, G_2, G_3 са свързани компоненти, следва, че няма път от a до b в G, няма път от a до c в G и няма път от b до c в G. Следователно, a и b са съседни в допълнителния граф $\overline{G}$, a и c са съседни в $\overline{G}$ и b и c са съседни в $\overline{G}$, от което следва, че a, b, c образуват триъгълник в $\overline{G}$.

Задача 3:(20т.) В група от няколко човек някои от тях са се ръкували.

Решение: Нека $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, V е множеството от хора, $|V| = n$ и $E \subseteq V \times V = \{(a, b) \in E \Leftrightarrow a$ **се е ръкувал с** $b\}$, която е симетрична. Разглеждаме крайния неорентиран граф $G(V, E)$.

а)(5т.) Докажете, че има двама души, които са се ръкували с еднакъв брой хора

Решение: Ще докажем, че в G има два върха с еднакви степени. Нека $f : V \to \{0, ..., n-1\}, f(v) = d(v)$.

1. Съществува връх $v \in V$, такъв че $d(v) = 0$.

   Тогава $f : V \to B = \{0, ..., n-2\}$, $|V| > |B|$ и съгласно Принципа на Дирихле има два върха с еднакви степени.

2. За всеки връх $v \in V$ е изпълнено: $d(v) > 0$.

   Тогава $f : V \to C = \{1, ..., n-1\}$, $|V| > |C|$ и съгласно Принципа на Дирихле има два върха с еднакви степени.

б)(5т.) Докажете, че броят на онези, всеки от които се е ръкувал с нечетен брой хора, е четно число

Решение: Ще докажем, че в G броят на върховете с нечетна степен е четно число. Вярно е, защото графът е краен неориентиран.

в)(5т.) Възможно ли е в група от 17 човека всеки да се е ръкувал с 20 човека

Решение: Ако $|V| = 17$ и всеки връх е от степен 20, то $|E| = \dfrac{17 \cdot 20}{2} = 170$, което е невъзможно, защото най-много ребра има пълният граф със 17 върха: $\dfrac{17 \cdot 16}{2} = 136$.

г)(5т.) Определете максималният брой ръкувания за група от 25 човека

Решение: Максималният брой ребра има пълен граф с 25 върха, а именно $\dfrac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Задача 4:(21т.) Нека $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{F}_2^n = \{f | f : J_2^n \to J_2\}$.

а)(5т.) Определете $|\mathcal{F}_2^n|$

Решение: Броят на функциите с домейн J_2^n и кодомейн J_2 е 2^{2^n}.

б)(16т.) Напишете в явен вид множеството $\mathcal{F}_2^2$

Решение: Елементите на множеството са двоичните функции на две променливи $\mathcal{F}_2^2 = \{f_i(x,y) | i \in J_{16}\}$, като всяка от функциите е представена таблично, както следва:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Задача 5:(20т.) Дадено е множеството от функции $\mathcal{F}_2^n = \{f | f : J_2^n \to J_2\}$. Два елемента на дефиниционното множество $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ ще наричаме противоположни, когато е изпълнено $\alpha_i = 1 - \beta_i, i \in I_n$.

Намерете броя на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които на противоположни елементи от дефиниционното множество приемат:

а)(10т.) еднакви значения;

Решение: Нека $\widetilde{\alpha}$ е произволен елемент от дефиниционното множество на функцията. Да означим противоположния му елемент с $\overline{\widetilde{\alpha}}$. Съгласно дефиницията той е единствен, освен това $\overline{\overline{\widetilde{\alpha}}} = \widetilde{\alpha}$.

Да разгледаме множествата $A = \{0\} \times J_2^{n-1}$ и $B = \{1\} \times J_2^{n-1}$. Те образуват разбиване на дефиниционното множество на функцията: $J_2^n = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Никое от множествата не съдържа противоположни елементи, противоположният на всеки елемент от кое да е множество принадлежи на другото множество. Така стойностите на функцията можем да избираме произволно например в множеството A, а за елементите на множеството B тя се доопределя еднозначно от условието $f(\overline{\widetilde{\alpha}}) = f(\widetilde{\alpha})$. Тъй като $|A| = 2^{n-1}$, то броят на търсените функции е $2^{2^{n-1}}$.

б)(10т.) различни значения.

Решение: Решението в случая е аналогично на решението от предишната подточка. Стойностите на функцията за елементите на множеството A можем да избираме произволно. Тъй като кодомейнът на функциите съдържа 2 елемента, то за всеки елемент съществува единствен различен от него елемент. Така стойностите на функцията еднозначно се доопределят за елементите на множеството B. И така броят на търсените функции е също $2^{2^{n-1}}$.

Задача 6:(20т.) Да се намери броят на функциите от $\mathcal{F}_2^n$, които изпълняват условието:

а)(10т.) Върху дадени k елемента от дефиниционното си множество функцията има стойност 1, останалите й стойности са произволни;

Решение: Стойността на всяка от търсените функции върху дадени k елемента от дефиниционното й множество е фиксирана, така че броят на тези функции зависи от това, по колко начина можем да изберем стойността на функцията върху останалите елементи от дефиниционното множество, а те са $2^n - k$. Тъй като възможните стойности са 2, то броят на търсените в условието функции е 2^{2^n-k}.

б)(10т.) Върху точно k елемента от дефиниционното си множество функцията има стойност 1.

Решение: Функцията приема стойност 1 върху точно k елемента от дефиниционното си множество, но не е фиксирано точно върху кои. Така задачата за намиране на броя на описаните функции се свежда до задача за намиране броя на k-елементните подмножества на дефиниционното множество на функцията. Всяко от тези подмножества определя точно една от търсените функции - тя приема стойност 1 върху елементите на това подмножество и стойност 0 върху всички останали. Така броят на търсените фунткции е $\binom{2^n}{k}$.

Забележка: Максимален брой точки 80.