Задачи за изпит по λСТД

Задача 1. ***(15 т.)*** *Да се даде дефиниция на безименни типизирани λ-термове. Именен контекст наричаме списък от променливи. Да се дефинират следните две фамилии от изображения, индексирани по типове τ:*

- *Φ_τ, което по именен контекст Γ и типизиран λ-терм t^τ, такива че Γ съдържа всички свободни променливи на t получава безименен λ-терм $\Phi_\tau(\Gamma, t^\tau)$ от тип τ, и*
- *Ψ_τ, което по именен контекст Γ и безименен типизиран λ-терм M^τ получава обикновен λ-терм $\psi_\tau(\Gamma, M^\tau)$ от тип τ със свободни променливи измежду Γ,*

такива че за всеки тип τ е изпълнено, че

- *$\Phi_\tau(\Gamma, \Psi_\tau(\Gamma, M^\tau)) = M^\tau$ и*
- *$\Psi_\tau(\Gamma, \Phi_\tau(\Gamma, t^\tau)) = t^\tau$.*

Задача 2. ***(15 т.)*** *Нека k и s са две фиксирани променливи и нека разгледаме подмножеството CL от апликативни λ-термове, дефинирано индуктивно чрез*

$$M, N \quad ::= \quad x \mid (MN).$$

Да се дефинира изображение Φ, което изобразява множеството на λ-термовете върху CL, така че:

(1) $\mathsf{FV}(\Phi(t)) = \mathsf{FV}(t) \cup \{k, s\}$,
(2) $t \overset{\beta}{=} \Phi(t)\,[k := K]\,[s := S]$.

Екстра кредит: ***(10 т.)*** *Да се напише програма, която реализира изображението Φ.*

Задача 3. ***(5 т.)*** *Да се дефинират комбинатори* $\mathsf{pred}, \mathsf{minus}$*, за които*

(1) $\mathsf{pred}\, c_0 \overset{\beta}{=} c_0$ *и* $\mathsf{pred}\, c_{k+1} \overset{\beta}{=} c_k$,
(2) $\mathsf{minus}\, c_k c_l \overset{\beta}{=} c_{k \dot{-} l}$, *където* $k \dot{-} l := \max(k - l, 0)$.

Екстра кредит: ***(2 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 4. ***(15 т.)*** *Да се дефинират комбинатори* quot *и* rem*, за които*

(1) $\mathsf{plus}\,(\mathsf{mult}\,(\mathsf{quot}\, c_k c_l)(c_l))(\mathsf{rem}\, c_k c_l) \overset{\beta}{=} c_k$,
(2) *ако* $\mathsf{rem}\, c_k c_l \overset{\beta}{=} c_n$, *то* $n < l$.

Екстра кредит: ***(5 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 5. ***(15 т.)*** *Да се дефинира комбинатор M, който симулира операцията "минимизация", т.е. ако t е комбинатор, за който съществува, число n, такова че*

(1) $tc_n \overset{\beta}{=} c_0$
(2) $\forall_{m<n} \exists_k (tc_m \overset{\beta}{=} c_{k+1})$,

то $Mt \overset{\beta}{=} c_n$.

Екстра кредит: ***(5 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 6. ***(10 т.)*** *Да се покаже, че $M \overset{\beta}{\to} N$ влече $M \overset{1}{\to} N$ и че $M \overset{1}{\to} N$ влече $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.*

Задача 7. ***(5 т.)*** *Да се покаже, че за всяко естествено число n:*

(1) *съществува тип σ_n от ред n, който е обитаем;*
(2) *съществува тип τ_n от ред n, който не е обитаем.*

Задача 8. ***(15 т.)*** *Да се дефинира изображение Φ върху множеството на типизираните λ-термове (в Church стил), което получава съответните безтипови λ-термове. Да се покаже, че*

(1) *за всеки затворен типизиран терм M^τ в стил Church може да се намери типов извод на $\Phi(M) : \tau$.*
(2) *за всеки безтипов терм M, за който имаме типов извод $\Gamma \vdash M : \tau$ съществува типизиран терм N^τ в стил Church, така че $\Phi(N) \equiv M$.*

Задача 9. ***(15 т.)*** *Множеството на слабо типизираните термове се дефинира индуктивно по следния начин:*

$$M, N \quad ::= \quad x \mid (MN) \mid \lambda_{x^\tau} M,$$

където τ е произволен тип. Да се покаже, че ако M е слабо типизиран терм и $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\sigma \equiv \tau$.

Задача 10. ***(5 т.)*** *Да се докаже, че ако $\Gamma, x : \rho \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash N : \rho$, то $\Gamma \vdash M\,[x := N] : \sigma$.*

Задача 11. ***(10 т.)*** *Да се покаже, че η конверсията $s^{\rho \Rightarrow \sigma} \overset{\eta}{\to} \lambda_{x^\rho} sx$ за $x \notin \mathsf{FV}(s)$ е конфлуентна и силно нормализируема. Да се обясни дали тези две свойства на η конверсията са в сила за безтиповото λ-смятане и защо.*

Задача 12. ***(20 т.)*** *Да се докаже в Hc, G3c или Nc, че*

(1) $A \tilde{\vee} B \leftrightarrow A \vee B$
(2) $A \tilde{\wedge} B \leftrightarrow A \wedge B$
(3) $\tilde{\exists}_x A \leftrightarrow \exists_x A$

Екстра кредит: ***(5 т.)*** *Да се опишат доказателствата в λ-синтаксис или в системата* Minlog.

Задача 13. ***(15 т.)*** *Да се докажат Хилбертовите аксиоми в G3i.*

Задача 14. ***(25 т.)*** *Преводът на Kuroda е трансформация на формули A до A^q, където $A^q := \neg\neg A_q$, а A_q се дефинира индуктивно така:*

- $P(\vec{x})_q := P(\vec{x})$
- $(A \to B)_q := A_q \to B_q$
- $(A \vee B)_q := A_q \vee B_q$
- $(A \wedge B)_q := A_q \wedge B_q$
- $(\forall_x A)_q := \forall_x \neg\neg A_q$
- $(\exists_x A)_q := \exists_x A_q$

Да се покаже, че

(1) $\vdash_c A \leftrightarrow A^q$
(2) $\Gamma \vdash_c A$ *тогава и само тогава когато* $\Gamma^q \vdash_m A^q$

Задача 15. ***(15 т.)*** *Да се покаже, че за всяка формула A от аксиомите $\forall_{\vec{x}}(\bot \to P(\vec{x}))$ е изводима в минимална логика формулата $\bot \to A$. Да се даде пример за формула A, за която формулата $\neg\neg A \to A$ не е изводима в минимална логика от аксиомите $\forall_{\vec{x}}(\neg\neg P(\vec{x}) \to P(\vec{x}))$ и да се обясни защо.*

Задача 16. ***(15 т.)*** *Да се докаже в Hc, $G3c$ или Nc, че*

(1) $(A \to \exists_x B) \to \exists_x (A \to B)$, *ако* $x \notin \mathsf{FV}(A)$.
(2) $((A \to B) \to C) \to (A \to C) \to C$
(3) $(A \to B) \vee (B \to A)$

Екстра кредит: ***(5 т.)*** *Да се опишат доказателствата в λ-синтаксис или в системата* Minlog.

Задача 17. *Да се докаже, че:*

- ***(5 т.)*** $Ni \vdash (A \to B) \tilde{\vee} (A \to C) \to A \to B \vee C$
- ***(5 т.)*** $Nm \vdash (A \vee B \to C) \to (A \to C) \wedge (B \to C)$
- ***(5 т.)*** $Ni \vdash (A \to \tilde{\exists}_x B) \to \tilde{\exists}_x (A \to B)$, *ако* $x \notin \mathsf{FV}(A)$
- ***(5 т.)*** $Nm \vdash \exists_x (A \to B) \to \forall_x A \to B$, *ако* $x \notin \mathsf{FV}(B)$.

Да се покажат всички пътеки в доказателството и да се нормализира, ако не е нормално. Екстра кредит: ***(2 т.)*** *Да се опише доказателството в λ-синтаксис или в системата* Minlog.

Задача 18. ***(15 т.)*** *Да се изведат в Hc, $G3c$ или Nc правилата $I\tilde{\vee}$, $E\tilde{\vee}$, $I\tilde{\wedge}$, $E\tilde{\wedge}$, $I\tilde{\exists}$, $E\tilde{\exists}$.*
Екстра кредит: ***(5 т.)*** *Да се опишат доказателствата в λ-синтаксис или в системата* Minlog.

Задача 19. ***(10 т.)*** *Да се изведе в Hc, $G3c$ или Nc формулата на пияниците: $\exists_x (Dx \to \forall_x Dx)$. Екстра кредит:* ***(3 т.)*** *Да се опише доказателството в λ-синтаксис или в системата* Minlog.

Задача 20. ***(10 т.)*** *Да се изведе в Hm, $G3m$ или Nm слабия вариант на формулата на пияниците: $\tilde{\exists}_x (Dx \to \forall_x Dx)$. Екстра кредит:* ***(3 т.)*** *Да се опише доказателството в λ-синтаксис или в системата* Minlog.

Задача 21. ***(10 т.)*** *Да се разпишат всички 10 пермутиращи редукции за доказателства на елиминация на конюнкция и дизюнкция над друга елиминация в двата записа: дърво на извод и термов синтаксис.*

Задача 22. *Да се дефинират в системата T функциите:*

(1) ***(5 т.)*** *степенуване и хиперстепенуване*
(2) ***(3 т.)*** *изваждане и сравнение* ($<$)
(3) ***(10 т.)*** *частно и остатък*
(4) ***(10 т.)*** *НОД*
(5) ***(10 т.)*** *проверка за делимост и проверка дали число е простох*

Задача 23. ***(15 т.)*** *Да се дефинират в системата T стандартните функции от Haskell* `map`, `foldr` *и* `filter`.

Задача 24. ***(15 т.)*** *Да се дефинира в системата T функцията на Sudan, дефинирана рекурсивно по следния начин:*

$$F(0, x, y) := x + y$$
$$F(n + 1, x, 0) := 0$$
$$F(n + 1, x, y + 1) := F(n, (F(n + 1, x, y), F(n + 1, x, y) + y + 1))$$

Задача 25. ***(15 т.)*** *Да се докаже, че* $\mathrm{HA}^\omega \vdash A \vee B \leftrightarrow \exists_b (\mathrm{at}(b) \to A) \wedge (\neg \mathrm{at}(b) \to B)$.

Задача 26. ***(15 т.)*** *Да се докаже, че* $\mathrm{HA}^\omega \vdash \forall_b((\mathrm{at}(b) \to A\,[b := \mathsf{tt}]) \to (\neg\mathrm{at}(b) \to A\,[b := \mathsf{ff}]) \to A)$.

Задача 27. ***(20 т.)*** *Да се докаже, че за всяка безкванторна формула A съществува атомарна формула A', така че* $\mathsf{NA}^\omega \vdash A \leftrightarrow A'$.

Задача 28. ***(30 т.)*** *Да се докаже в* HA^ω*, че всеки списък от естествени числа има най-малък/най-голям елемент. От доказателството да се извлече програма за намиране на минимум/максимум на списък.*

Задача 29. ***(5 т.)*** *Да се покаже контрапример на Лемата за субституцията* $M\,[x := N]\,[y := P] \equiv M\,[y := P]\,[x := N\,[y := P]]$*, ако условието за променливите* $x \notin \mathsf{FV}(P)$ *не е изпълнено.*

Задача 30. ***(20 т.)*** *Да се реализира програма, която позволява дефиниране на безтипови λ-термове и изпълняване над тях на четирите стратегии за редукция (апликативна, нормална, извикване по стойност, извикване по име).*

Задача 31. ***(5 т.)*** *Да се покаже контрапример за това че от* $M \stackrel{\beta}{=} N$ *не следва, че* $\Gamma \vdash M : \tau \iff \Gamma \vdash N : \tau$.

Задача 32. ***(15 т.)*** *Да се покажат семантични изводи на изреченията "john reads a new book", "a new student works", "a new student reads a book".*

Задача 33. ***(25 т.)*** *Да се реализира алгоритъмът за нормализация чрез оценяване (NbE) на λ-термове на нестрог език за функционално програмиране.*

Задача 34. ***(20 т.)*** *Да се реализира програма, която позволява дефиниране на доказателства в Хилбертовите системи* $H[mic]$ *в един от двата варианта:*

(1) *доказателствата винаги са коректни по построение;*
(2) *позволено е да бъдат построени некоректни доказателства, но е реализирана функция за проверка за коректност.*

Задача 35. ***(30 т.)*** *Да се реализира програма, която позволява дефиниране на доказателства в системи за секвенциално смятане* $G[13][mic]$ *в един от двата варианта:*

(1) *доказателствата винаги са коректни по построение;*
(2) *позволено е да бъдат построени некоректни доказателства, но е реализирана функция за проверка за коректност.*

Задача 36. ***(5 т.)*** *Да се докаже, че ако* $\vdash_m \neg\neg A^g \to A^g$*, то* $\vdash_m \neg\neg(\exists_x A)^g \to (\exists_x A)^g$.

Задача 37. ***(15 т.)*** *Да се докаже, че ако M е нормално доказателство в* $Nm(\to,\forall)$ *на формулата C от допусканията* $A_i^{u_i}$*, то всяко срещане на формула в доказателствата е подформула на някое от C или A_i.*

Задача 38. ***(5 т.)*** *Да се дефинират комбинатори* $\mathsf{pow}, \mathsf{hpow}$*, за които*

- $\mathsf{pow}\, c_k\, c_l \stackrel{\beta}{=} c_{k^l}$
- $\mathsf{hpow}\, c_k\, c_l \stackrel{\beta}{=} c_p$*, където* $p = \underbrace{k^{k^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{k}}}}}}_{l}$.

Екстра кредит: ***(2 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 39. ***(10 т.)*** *Да се дефинира комбинатор A, който реализира функцията на Акерман, т.е. за който*

- $A\, c_0\, c_l \stackrel{\beta}{=} c_{l+1}$,
- $A\, c_{k+1}\, c_0 \stackrel{\beta}{=} A\, c_k\, c_1$,
- $A\, c_{k+1}\, c_{l+1} \stackrel{\beta}{=} A\, c_k\, (A\, c_{k+1}\, c_l)$.

Екстра кредит: ***(5 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 40. ***(10 т.)*** *Да се дефинира комбинатор* fact, *за който е изпълнено* $\mathsf{fact}\, c_n \stackrel{\beta}{=} c_{n!}$. *Екстра кредит:* ***(4 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 41. ***(3 т.)*** *Да се дефинират комбинатори, които реализират булевите операции дизюнкция, конюнкция и отрицание. Екстра кредит:* ***(1 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

В по-долните задачи считаме, че $c_{true} := \lambda_{x,y}x$ и $c_{false} := \lambda_{x,y}y$.

Задача 42. ***(5 т.)*** *Да се дефинират комбинатори* eq *и* lt, *за които*

- $\mathsf{eq}\, c_m\, c_n \stackrel{\beta}{=} c_{m=n}$;
- $\mathsf{lt}\, c_m\, c_n \stackrel{\beta}{=} c_{m<n}$.

Екстра кредит: ***(2 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 43. ***(10 т.)*** *Да се дефинират комбинатори* $\mathsf{divides}$ *и* $\mathsf{isprime}$, *така че*

- $\mathsf{divides}\, c_m\, c_n \stackrel{\beta}{=} c_{\exists_k km=n}$;
- $\mathsf{isprime}\, c_n \stackrel{\beta}{=} c_{\neg\exists_{k>1}\exists_{l>1}kl=n}$.

Екстра кредит: ***(4 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 44. ***(20 т.)*** *Да се предложи дефиниция на списъци в безтиповото λ-смятане. Да се реализират комбинатори реализиращи стандартните функции от Haskell* `map`, `foldr` *и* `filter`. *Екстра кредит:* ***(10 т.)*** *Да се направи реализация на Scheme.*

Задача 45. ***(25 т.)*** *Да се реализират програмно термовете и β-редукциите в системата T и да се реализира алгоритъм за нормализация.*