Контролна работа (упражнения, КН 2, група 6) по ДАА, 9.04.2014г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	5	5	5	5	20

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване функциите по-долу. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$\lg((n!)^n), \qquad \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i^2}, \qquad 3^{\lg n}, \qquad (\sqrt{n})^3 + \lg(n!), \qquad \binom{n}{2}, \qquad \sum_{i=0}^{n} i(n-i)$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2$ б) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n^2$

в) $T(n) = T(n-1) + n\sqrt{n}$ г) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 2^n$

Задача 3 Докажете, че всеки сортиращ алгоритъм прави поне $n-1$ сравнения върху входните данни за всеки вход с дължина n.

Задача 4 Намерете сложността на следния алгоритъм:

```
Easy(n: integer)
  i ← 1; j ← 1
  while i ≤ n do
      j ← j + 1
      if j > i × i
          j ← 1
          i ← i + 1
```

Решения:

Задача 1 Означаваме с $f_1, f_2 \dots f_6$ дадените функции. Първо ги опростяваме, като ползваме основните свойства на асимптотичните нотации (за f_2 ползваме факта, че редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ е сходящ):

$$f_1 = \lg((n!)^n) = n\lg(n!) = n\Theta(n\lg n) = \Theta(n^2\lg n)$$

$$f_2 = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{n^2}{i^2} = n^2 \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{i^2} = n^2\Theta(1) = \Theta(n^2)$$

$$f_3 = 3^{\lg n} = (2^{\lg 3})^{\lg n} = (2^{\lg n})^{\lg 3} = n^{\lg 3}$$

$$f_4 = (\sqrt{n})^3 + \lg(n!) = n^{1.5} + \Theta(n\lg n) = \Theta(n^{1.5})$$

$$f_5 = \binom{n}{2} = \Theta(n^2)$$

$$f_6 = \sum_{i=0}^{n} i(n-i) \approx \int_0^n x(n-x)dx = \Big|_0^n (\frac{n}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3) = \frac{n^3}{2} - \frac{n^3}{3} = \Theta(n^3)$$

Очевидно всички функции имат полиномиален растеж. За f_3 и f_4 сравняваме степените ($\lg 3 > 1.5$, защото $3 > 2^{1.5}$). После сравняваме степените на полиномите, при равенство множителя $\lg n$.

Така получаваме наредбата:

$$f_4 = \Theta(n^{1.5}) \prec f_3 = \Theta(n^{\lg 3}) \prec f_2 = \Theta(n^2) \asymp f_5 \prec f_1 = \Theta(n^2\lg n) \prec f_6 = \Theta(n^3)$$

Задача 2 Случаи а) и б) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

Рекурентното отношение в) можем да решим със заместване – след $n-1$ замествания получаваме $T(n) = T(0) + \sum_{i=0}^{n} i\sqrt{(i)}$, като сумата оценяме с интегриране.

Опростяваме г) като извадим равенствата, дефиниращи $T(n)$ и $T(n-1)$, после прилагаме метода с характеристични уравнения.

Задача 3 *Първи начин:* Всеки алгоритъм за сортиране трябва да сравни съседните по нарастване елементи, иначе може да бъде заблуден с размяна на двойка съседни, ако не ги сравнява. Броят на съседните по нарастване е точно $n-1$, следователно алгоритъмът прави поне $n-1$ сравнения.

Втори начин: Да разгледаме неориентирания граф от сравнения на двойките елементи, които прави сортиращият алгоритъм. Ако този граф не е свързан, ще може да лъжем алгоритъма, като увеличаваме или намаляме с константа всички елементи в една от свързаните компоненти, без да се промени начина на работа на алгоритъма (той ще прави същите сравнения, но ще можем да правим ел. от избраната компонента най-малки или най-големи в масива). Следователно графът е свързан, а в свързан граф с n върха има поне $n-1$ ребра (сравнения).

Задача 4