Контролно ДАА 10.04.2014г.

зад 1. Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Даден е алгоритъм Alg-1, чийто вход е масив

A[1, 2, . . . , n] от цели числа, две по две различни. Докажете, че алгоритъмът връща второто най-малко число от масива.

```
Alg-1(A[1, 2, . . . , n] : integers)

1.  m ← max {A[1], A[2]}
2.  s ← min {A[1], A[2]}
3.  for i ← 3 to n
4.      if A[i] < s
5.          m ← s
6.          s ← A[i]
7.      else
8.          if A[i] < m
9.              m ← A[i]
10. return m
```

зад 2. Подредете по асимптотично нарастване следните шест ункции на n:

n^2+2014n $\quad \sum_{i=1}^{n} i \quad \binom{n}{\frac{n}{2}} \quad 2^n \quad (2n)^3 \quad n^{\frac{2}{\log_2 n}}$

зад 3. Решете следните рекурентни отношения:

А) $T(n)=4T\left(\frac{n}{3}\right)+n$ Б) $T(n)=2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)+n^2$

В) T(n)=2T(n-1)+2014 Г) $T(n)=5T(n-1)+6T(n-2)+1+6^n$

Решения:

Зад 1 Следното твърдение е инварианта за цикъла:
При всяко достигане на ред 3 променливата s съдържа стойността на

минималния елемент от подмасива A[1 . . . i-1], а променливата m съдържа стойността на втория най-малък елемент от подмасива A[1 . . . i-1].
База: При първото достигане на ред 3 променливата i е 3. Имайки предвид, че по условие в масива няма еднакви числа, за i = 3 твърдението е „ m = max {A[1], A[2]} и s = min {A[1], A[2]}“. Това е вярно заради присвояванията на ред 1 и 2.
Поддръжка: Да допуснем, че инвариантата е изпълнена при някое достигане на ред 3, което не е последното. От допускането и това, че в масива няма еднакви числа следва, че s < m. Следните три възможности са изчерпателни:
1. A[i] > m > s. В такъв случай е вярно, че s съдържа стойността на минималния елемент от A[1 . . . i], а m на втория най-малък елемент от A[1 . . . i], преди да започне изпълнението на тялото на цикъла. От друга страна, нито едно от условията на редове 4 и 8 не е изпълнено,следователно нито едно от присвояванията в цикъла не се извършва. Следователно, спрямо новата стойност на i при следващото достигане на ред 3, инвариантата остава в сила.
2. s < A[i] < m. В такъв случай е вярно, че s съдържа стойността на минималния елемент от A[1 . . . i], а A[i] е вторият най-малък елемент от A[1 . . . i], преди да започне изпълнението на тялото на цикъла. В този случай условието на ред 4 не е изпълнено, но условието на ред 8 е изпълнено, така че присвояването на ред 9 се извършва. Спрямо новата стойност на i при следващото достигане на ред 3, инвариантата остава в сила.
3. m > s > A[i]. В такъв случай е вярно, че A[i] съдържа стойността на минималния елемент от A[1 . . . i], а s на втория най-малък елемент от A[1 . . . i], преди да започне изпълнението на тялото на цикъла. В този случай условието на ред 4 е изпълнено, така че присвояванията на редове 5 и 6 се извършват. Спрямо новата стойност на i при следващото достигане на ред 3, инвариантата остава в сила.
Терминация: При последното достигане на ред 3 очевидно i = n + 1. Замествайки тази стойност в инвариантата, получаваме твърдението “ s съдържа стойността на минималния елемент от подмасива A[1 . . . n], а променливата m съдържа стойността на втория най-малък елемент от подмасива A[1 . . . n]“.
Зад 2.Да означим дадените функции с $f_1(n),\dots,f_6(n)$ в реда на изписването им в условието.Първо забелязваме, че
$f_2(n)=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}=\theta(n^2)$ и освен това $f_5(n)=8n^3=\theta(n^3)$.
Очевидно $f_1(n)=\theta(n^2)$.Следователно $f_5(n)\succ f_1(n) \asymp f_2(n)$.

Да разгледаме $f_3(n)$.Използвайки дефиницията на биномен коефициент и апроксимацията на Стирлинг, получаваме

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\,\left(\frac{n}{2}\right)!} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{2\,\pi\,\frac{n}{2}}\,\frac{\frac{n^n}{e^n}}{\frac{\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2}} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}\,2^n = \theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,2^n\right)$$

Тъй като

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}2^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ *е изпълнено* $f_4(n) \succ f_3(n)$.

Да разгледаме и $f_6(n) = n^{\frac{2}{\log_2 n}}$=$\left(\left(2^{\log_2 n}\right)^{\frac{2}{\log_2 n}}\right)$=$2^2 = 4$.

Известно е, $n^a \succ$ const за всяко положително а.

Остана да разгледаме $f_3(n)$ и $f_5(n)$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,2^n}{n^3} = \infty$$

Следователно крайната подредба е:

$f_4(n) \succ\ f_3(n) \succ\ f_5(n) \succ\ \ f_2(n) \asymp f_1(n)\ \succ\ f_6(n)$

Зад 3.

Случаи А) и Б) са подходящи за решаване с Мастър теорема.

А) Пресмятаме к=$\lim_3 4 > 1$. И сравняваме n^k и f(n)=n.От $\lim_3 4 > 1$ следва, че съществува $\varepsilon > 0$, такова че $n^{(\log_3 4-\varepsilon)} \succ$ *n.Попадаме в първи случай на Мастър теоремата, следователно T(n)=* $\theta(n^{log_3 4})$

Б) Пресмятаме к=$\lim_{\sqrt{2}} 2 = 2$ и сравняваме $n^k = n^2$и $f(n) = n^2$.Очевидно $n^k \asymp f(n)$.Попадаме във втори случай на Мастър теоремата, следователно T(n)=$\theta(n^2 \lg n)$.

А случай В) и Г) ще решим с метода на характеристичното уравнение.

В) Хомогенната част поражда уравнение х=2, с множество от корени {2}.А нехомогенната поражда множество от корени {1}.Като слеем двете мултимножества получаваме пълния списък от корени {1,2}.Базисните решения са 1^nи 2^n. Последното расте най-бързо, следователно T(n)= $\theta(2^n)$.

Г) Хомогенната част поражда уравнение x^2-5x-6=0, с множество от корени {6,-1}.А нехомогенната поражда множество от корени {1,6}.Като слеем двете мултимножества получаваме пълния списък от корени {1,6,6,-1}.Базисните решения са 1^n, $(-1)^n$, 6^n и $n6^n$. Последното расте най-бързо, следователно T(n)= $\theta(n6^n)$.