Контролно ДАА

Задача 1. Даден е неориентиран граф. Да се докаже, че сумата от степените на върховете е четно число.

Всяко ребро участва в сумата 2 пъти - по веднъж за върховете, които са инцидентни с него. Сумата от степените на върховете е $2|E|$.

Задача 2. В един поток има n студенти, като всеки има Facebook профил. Преподавател иска да разпространи новина до всички, като я съобщи лично на възможно най-малко студенти, а те от своя страна да я споделят с останалите като използват приятелствата помежду си. Дадени са приятелствата между студентите - m двойки, така че ако единият от двойката научи новина, може да я съобщи на другия. Всеки, който научи новината може да я сподели с произволен брой от своите приятели. Да се намери минималния брой студенти, които преподавателят трябва да уведоми лично.

Модел: неориентиран граф, върхове - студентите, ребра - приятелствата. Задачата се свежда до намиране на броя на свързаните компоненти в графа. Преподавателят трябва да уведоми по един произволен студент от всяка свързана компонента.

Едно обхождане (в ширина или дълбочина) намира една свързана компонента. Стартираме обхождане за всеки непосетен връх. Броят на компонентите е равен на броя на обхожданията. Сложност: $\Theta(n+m)$.

Задача 3. Да се намери броя на n-цифрените числа със сума от цифрите s. Разрешено е число да започва с цифрата 0.

Задачата се решава лесно с динамично програмиране.

$f(n,s) = \sum_{i=0}^{9} f(n-1, s-i)$

База:

$f(1,i) = 1$, if $i = 0, .., 9$

$f(1,i) = 0$, else.

Сложност: $\Theta(ns)$.

Задача 4. (Бонус) Даден е неориентиран тегловен граф. Съществува ли минимално покриващо дърво, в което теглото на най-тежкото ребро е не по-голямо от c?

I начин: Премахваме всички ребра с тегло $> c$. Ако графът, състоящ се от същите върхове и останалите ребра, е свързан, ще съществува покриващо дърво. Проверка дали граф е свързан може да се направи с обхождане (bfs, dfs). Сложност: $\Theta(n+m)$.

II начин: Всяко MST е Bottleneck Spanning Tree. Т.е. всяко МПД минимизира теглото на най-тежкото ребро.

Строим МПД с алгоритъма на Прим или Крускал. Ако на някоя от стъпките алгоритъмът избере ребро с тегло $> c$, не съществува търсеното МПД.

Сложност: $\Theta(m \lg n)$ за Прим (списък на наследниците и двоична пирамида); $\Theta(m \lg m)$ за Крускал.

Контролно ДАА

Задача 1. Да се намери броя на ребрата в пълен неориентиран граф.

Всеки два върха са свързани с ребро. Броят на ребрата е $\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 2. В един поток има n студенти, като всеки има Twitter профил. Дадени са "следванията"между студентите - m двойки $(x\ y)$, така че x е последовател (follower) на y. Студент номер 1 поства tweet. След 1 секунда всички негови последователи retweet-ват този пост (споделят го със своите последователи). След още 1 секунда техните последователи също retweet-ват и т.н. До колко студента ще е достигнала информацията след k секунди?

Модел: ориентиран граф, върхове - студентите. Най-удобното представяне е със списък на наследниците: има ребро от u към v, ако v е последовател на u.
Задачата се свежда до обхождане в ширина по нива - търсим броя на посетените върхове след k итерации (нива). Сложност: $\Theta(n+m)$

Задача 3. Да се намери броя на n-цифрените числа със сума от цифрите s. Разрешено е число да започва с цифрата 0.

Задачата се решава лесно с динамично програмиране.
$f(n,s) = \sum_{i=0}^{9} f(n-1, s-i)$
База:
$f(1,i) = 1$, if $i = 0, .., 9$
$f(1,i) = 0$, else.
Сложност: $\Theta(ns)$.

Задача 4. (Бонус) Дадени са n града, които трябва да бъдат свързани, така че да има път между всеки два (незадължително директен). Дадени са m двойки градове, между които вече са построени директни пътища, и k тройки числа $(x\ y\ z)$: цената за построяване на път между x и y е z. Да се намери минималната цена за изграждането на инфраструктура.

Съществуващите m пътища представяме като ребра с тегло 0. Върху графа с $m+k$ ребра изпълняваме алгоритъм за МПД.
Сложност: $\Theta(m \lg n)$ за Прим (списък на наследниците и двоична пирамида); $\Theta(m \lg m)$ за Крускал.