Второ малко контролно ДАА - 5.06.14г.

Зад. 1 Даден е масив от цели числа A[1, . . . , n]. Предложете колкото е възможно по-бърз алгоритъм, който строи нов масив B[1, . . . , n], такъв че
∀i, 1≤ i ≤ n : B[i] = $\prod_{j\in\{ \text{Xn}\setminus\{i\}\}} A[i]$, където Xn = N \({0}∪ {i ∈ N |i > n}).
Не може да се използва опеацията деление.
Решение:
В линейно време се строят два масива Pref[1,..., n] и Suff[1,..., n], където ∀i, 1≤ j≤ n : Pref[i] =$\prod_{j=1}^{i-1} A[j]$ и ∀i, 1≤ j≤ n : Suff[i] = $\prod_{j=i+1}^{n} A[j]$.
След това ∀i, 1 ≤j ≤n : B[i] = Pref[i]* Suff[i]. Обща сложност: Θ(n).

Зад. 2 Решете следните рекурентни отношения:
А) T(n)=4T$\left(\frac{n}{2}\right)$+n^2 Б)T(n)=2 T$\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)$+$n^2$
В) T(n)=$\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + n^2$ Г) T(n)=3T(n-1)+3^n($\sqrt{3}$ + 5n)+ 3^n(1+ n)
Решение:
А)Прилагаме Мастър теоремата k=$\log_2 4$, k=2, следователно $n^k = \Theta(n^2)$,намираме се във втори случай,решението на рекурентното отношение е T(n)= $\Theta(n^2 \lg n)$.
Б) Прилагаме Мастър теоремата k=$\log_{\sqrt{2}} 2$, k=2, следователно $n^k = \Theta(n^2)$, намираме се във втори случай,решението на рекурентното отношение е T(n)= $\Theta(n^2 \lg n)$.
В)За да унищожим сумиращите се членове, изписваме рекурентното отношение за n-1 и го изваждаме от рекурентното отновение, изписано за n.Ще получим равенството T(n)-T(n-1)=T(n-1)+ $n^2 - (n-1)^2$.Опростяваме го до T(n)=2 T(n-1)+2n-1 и го решаваме лесно с метода на характеристичното уравнение. Хомогенната част поражда мн-вото от корени {2} , а нехомогенната част :{1,1}. Като слеем двете мултимножества получаваме пълния списък от корени {1,1,2}. Базисните решения са $1^n, n1^n, 2^n$. Последното расте най-бързо, следователно T(n)= Θ(2^n).
Г)Корените на характеристичното уравнение:от хомогенната част {3}, от нехомогенната част {3,3}=> общо {3,3,3} оттук T(n)= Θ($n^2 3^n$).

Зад. 3 Да се предложи алгоритъм за намиране на цикъл с нечетна дължина в неориентиран граф.
Решение:
Задачата може да се реши с познатите алгоритми BFS и DFS, като при посещение в нов връх по време на алгоритъма да се използва оцветяване 0/1. По този начин, ако стигнем до връх, оцветен в различен цвят от този, който бихме ползвали в момента, то сме намерили нечетен цикъл.
Зад. 4 Нека двама играчи, A и B, играят финален мач по тенис, като титлата ще е за играчът, който пръв спечели n игри.Да допуснем, че играчите са еднакво силни, т.е. всеки има шанс 50% да спечели всяка отделна игра.Вече са изиграни i+j игри, като A е спечелил i, а B - j игри.Предложете бърз алгоритъм , който да изчислява вероятността A да спечели финала.

Пример:Ако i=n-1 и j=n-3, вероятността А да спечели е 7/8, тъй като е достатъчно да спечели някоя от следващите 3 игри.

Решение:
Да дефинираме рекурсивна процедура за изчисляване на вероятността играч А да спечели при вече изиграни i+j игри:

```
P( i , j , n :integer)
1.  if i=n
2.        return  1
3.  if j=n
4.        return  0
5.   return  ½P(i+1,j,n)+ ½P(i,j+1,n)
```

Тази функция има два аргумента i и j, които заемат стойности м/у 0 и n.Можем да представим стойостите й в двумерна таблица и да я запълним за време $\Theta(n^2)$.

```
Create (n)
1.  създаваме масив P[0…n][0…n]
2.  for i=0 to n
3.        P[n,i]=1
4.        P[i,n]=0
5.  for i=n-1 downto 0
6.      for j=n-1 downto 0
7.            P[i,j]= ½P[i+1,j]+ ½P[i,j+1]
```