Писмен изпит (студенти от минали години) по ДАА, 26.06.2014г.

Име: _______________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 Подредете по асимптотично нарастване следните осем функции. Обосновете отговора си и напишете в явен вид подредбата.

$$4^{\lg n}, \quad n^2 + 3^n, \quad n^2 \lg n, \quad \sum_{i=1}^{n} 2^n, \quad (\sqrt{32})^{\lg n}, \quad n^3 + 2^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{i^2}, \quad \sqrt{n}\binom{n}{2}$$

Задача 2 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + 5n^2 + T(\frac{n}{2})$ б) $T(n) = 2T(\frac{n}{\sqrt{2}}) + n \lg n$

в) $T(n) = T(n-1) + \frac{n}{n+1}$ г) $T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 2^n$

Задача 3 Редицата $a_1, a_2, \ldots a_n$ се състои от цели положителни числа, по-малки от m. Предложете бърз алгоритъм, който намира двойка елементи на редицата, чиято сума е най-близка до m. Формално: търсим ненаредена двойка $\{a_i, a_j\}$, $i \neq j$, такава че $|a_i + a_j - m|$ е минимално.

Задача 4 Даден е неориентиран граф $G(V, E)$ с теглова функция w. Минималното покриващо дърво в него е T, а най-широкият път между върхове s и t е P. Теглата на всички ребра в графа били увеличени с константа c. Докажете или опровергайте всяко от следните твърдения:

(a) T остава минимално покриващо дърво.

(b) P остава най-широк път между s и t.

Дефиниция: Най-широк път между два върха u и v е всеки прост път (без повтаряне на върхове) p между тях, такъв че най-лекото ребро е максимално. Ако си представим графа като пътна мрежа, в която върховете са градове, ребрата са пътища между тях, а теглата са ширините на пътищата, най-широк път между два града е път, по който може да мине възможно най-широк автомобил.

Задача 5 Пред каса за билети чака опашка от $n \geq 2$ човека: h_1, h_2, $\ldots$, h_n, в този порядък. Известно е, че ако h_i си купува билет сам или сама, това ще отнеме време d_i, за $1 \leq i \leq n$. От друга страна, ако h_i и h_{i+1} се разберат да си купят двата билета заедно, това би отнело време c_i, за $1 \leq i \leq n-1$. Предложете колкото е възможно по-бърз алгоритъм, който предоставя схема за закупуване на билети, по която опашката би минала максимално бързо през касата (нови хора не идват на опашката). Схемата задава дали изобщо има комбинирания на съседи в опашката и ако да, кой с кого се комбинира.

Задача 6 Даден е неориентиран граф $G(V, E)$ с теглова функция $w : E \to R^+$. Графът съдържа хамилтонов цикъл и има четен брой върхове. Нека M е минималното перфектно съчетание за G, а C е най-краткият маршрут на търговския пътник (цикъл, минаващ по веднъж през всеки връх с минимална сума на теглата на ребрата).

Докажете неравенството:

$$2 \sum_{(u,v) \in M} w_{(u,v)} \leq \sum_{(u,v) \in C} w_{(u,v)}$$

Дефиниция: Перфектно съчетание в неориентиран граф е множество от ребра на G, никои два от които нямат общ връх и освен това всеки връх е в поне едно от тези ребра. *Минимално перфектно съчетание* в неориентиран тегловен граф е перфектно съчетание с минимално сумарно тегло на ребрата.