Примерни решения на задачите от семестриалното контролно по ДС, втори поток, КН, 27.11.2014 г.

Зад. 1 **Зад. 1** Нека A е множеството $\{1, 2, \ldots, 9\}$ и k е цяло положително число. Нека

$$\mathcal{Y}_k = \{X \in 2^A \,:\, |X| = k\}$$

Кое е най-малкото положително естествено число k, такова че

$$\forall B \in \mathcal{Y}_k \;\; \exists C \subseteq B \;\left(|C| = 2 \wedge \sum_{x \in C} x = 10 \right)$$

Решение: Търсеното число е 6. Трябва да докажем две твърдения:

$$\forall B \in \mathcal{Y}_6 \;\; \exists C \subseteq B \;\left(|C| = 2 \wedge \sum_{x \in C} x = 10 \right) \tag{1}$$

$$\neg \left(\forall B \in \mathcal{Y}_5 \;\; \exists C \subseteq B \;\left(|C| = 2 \wedge \sum_{x \in C} x = 10 \right) \right) \leftrightarrow \tag{2}$$

$$\exists B \in \mathcal{Y}_5 \;\; \forall C \subseteq B \;\left(|C| \neq 2 \vee \sum_{x \in C} x \neq 10 \right) \leftrightarrow$$

$$\exists B \in \mathcal{Y}_5 \;\; \forall C \subseteq B \;\left(|C| = 2 \rightarrow \sum_{x \in C} x \neq 10 \right)$$

(1) казва, че всяко шест елементно подмножество на A има два (различни) елемента, чиято сума е 10. Да допуснем противното. Забелязваме, че всяко подмножество A' на A с повече от един елемент има две елемента със сума 10 т.с.т.к. поне едно от $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$ е подмножество на A'. Тогава, да няма два елемента със сума 10 в A' е същото като за всяко от $\{1, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 7\}$, $\{4, 6\}$, **не повече от един елемент от него** да се съдържа в A'. Сега забелязваме, че има точно един елемент на A, а именно 5, който не се съдържа в никое от тези множества. Това означава, че $|A'|$ е най-много 5 и е невъзможно $|A'| = 6$.

(2) казва, че има пет елементно подмножество на A, такова че във всяко негово двуелементно подмножество елементите нямат сума 10. Пример за такова пет елементно подмножество на A е $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
□

Зад. 2 Разгледайте думата $\boxed{\text{ПЕРМАНЕНТНАТА}}$. Колко различни думи можем да образуваме, размествайки буквите на тази дума? Не се иска тези думи да са част от естествения език – за целите на тази задача, *дума* е всяка последователност от букви.

Решение: Дадената дума има 13 букви, ако броим и повторенията. Три букви не се повтарят, други две букви се появяват по два пъти, и други две букви се появяват по три пъти. Отговорът е:

$$\frac{13!}{2!2!3!3!} = 43\,243\,200$$

□

Зад. 3 Ако развием израза $(a + b + c + d + e)^{16}$, какъв е коефициентът пред $ab^3c^3d^2e^7$?

Решение:

$$\frac{16!}{1!3!3!2!7!} = 57\,657\,600$$

□

Зад. 4 Нека $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, c\}$ и $D = \{2, c, \emptyset\}$. Напишете в явен вид множеството $2^{D\setminus(A\setminus B)}$.

Решение: $A \setminus B = \{2\}$. Тогава $D \setminus (A \setminus B) = \{c, \emptyset\}$ и

$$2^{D\setminus(A\setminus B)} = 2^{\{c,\emptyset\}} = \{\emptyset, \{c\}, \{\emptyset\}, \{c, \emptyset\}\}$$

□

Зад. 5 Докажете по индукция, че за всяко $n \geq 0$, в сила е:

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.2^i = (2n^2 - 4n + 6)2^n - 6$$

Решение:
База: При $n = 0$, твърдението е

$$\sum_{i=0}^{0} i^2.2^i = (2.0^2 - 4.0 + 6)2^0 - 6$$

Очевидно и лявата, и дясната страна са равни на нула.
Индуквивно предположение: Нека твърдението е вярно за някакво естествено n.
Индуктивна стъпка: Трябва да докажем, че:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2.2^i = (2(n+1)^2 - 4(n+1) + 6)2^{n+1} - 6$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+1} i^2.2^i = && \left(\text{по определението на } \sum\right)\\
&\left(\sum_{i=0}^{n} i^2.2^i\right) + (n+1)^2 2^{n+1} = && (\text{съгласно индуктивното предположение})\\
&(2n^2 - 4n + 6)2^n - 6 + (n+1)^2 2^{n+1} = &&\\
&(n^2 - 2n + 3 + n^2 + 2n + 1)2^{n+1} - 6 = &&\\
&(2n^2 + 4)2^{n+1} - 6 = &&\\
&(2n^2 + 4n - 4n - 2 + 2 - 2 + 2 + 4)2^{n+1} - 6 = &&\\
&(2n^2 + 4n + 2 - 4n - 4 + 6)2^{n+1} - 6 = &&\\
&(2(n+1)^2 - 4(n+1) + 6)2^{n+1} - 6 &&
\end{aligned}$$

Доказахме чрез еквивалентни преобразувания и използване на индуктивното предположение, че лявата страна е равна на дясната. □

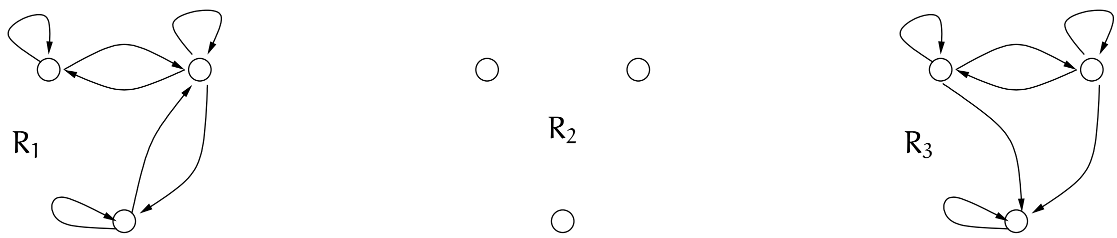
Зад. 6 Професор Дискретков твърди, че в дефиницията на понятието *релация на еквивалентност* има излишък. Професорът казва:

> Едно от трите свойства в дефиницията на *релация на еквивалентност* е излишно! Ако от дефиницията изпуснем това свойство, ще получим дефиниция, еквивалентна на дадената!

Прав ли е професорът, или не?

Решение: Професорът греши. Нито едно от трите свойства не се имплицира от останалите две. За да се убедим в това, достатъчно е да демонстрираме:

- релация R_1, която е рефлексивна и симетрична, но не е транзитивна;
- релация R_2, която е транзитивна и симетрична, но не е рефлексивна;
- релация R_3, която е рефлексивна и транзитивна, но не е симетрична.



□