Примерно решение на домашно №2 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток, зимен семестър на 2014/2015 г..

Зад. 1 *Двоичен брояч с* n *позиции* е вектор от n двоични числа (0 или 1), който се интерпретира като число, записано в двоична позиционна бройна система. Броячът бива увеличаван с 1 в дискретни моменти във времето. В началния момент t_0 броячът съдържа само нули, тоест представлява числото 0 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_1 той представлява числото 1 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_2 той представлява числото 2 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_3 той представлява числото 3 в двоична система, и така нататък:

$$
\begin{aligned}
t_0 &: \quad 0\,0 \quad \cdots \quad 0\,0\,0 \\
t_1 &: \quad 0\,0 \quad \cdots \quad 0\,0\,1 \\
t_2 &: \quad 0\,0 \quad \cdots \quad 0\,1\,0 \\
t_3 &: \quad 0\,0 \quad \cdots \quad 0\,1\,1 \\
t_4 &: \quad 0\,0 \quad \cdots \quad 1\,0\,0 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Изобщо, в момент t_k броячът съдържа двоичния запис на числото k. Увеличаването на брояча с 1 продължава, докато той съдържа поне една нула. Когато броячът съдържа само единици:

$$\underbrace{1\,1 \quad \cdots \quad 1\,1\,1}_{n \text{ на брой}}$$

увеличаването спира и броячът остава в това състояние. Отговорете на следните въпроси:

1. Кое е числото (в двоична позиционна бройна система), което остава записано в брояча след спирането му?

2. *Битово обръщане* наричаме всяко преминаване от 0 в 1 или от 1 в 0 от даден t_i към следващия t_{i+1}. Примерно, при преминаването от t_0 в t_1 има точно едно битово обръщане, а именно в най-дясната позиция; при преминаването от t_1 в t_2 има точно две битови обръщания, а именно в двете най-десни позиции ; при преминаването от t_2 в t_3 има точно едно битово обръщане; при преминаването от t_3 в t_4 има точно три битови обръщания; и така нататък. Нека T_n е броят на всички битови обръщания за двоичен брояч с n позиции – от момента t_0 до последния момент, в който увеличаването спира. Напишете рекурентно отношение за T_n и дайте кратка аргументация за него.

3. Решете рекурентното отношение чрез метода с характеристичното уравнение.

Решение:

1. Числото е $2^n - 1$.

2. Ако $n = 1$, битовото обръщане е само едно. За по-големи стойности на n забелязваме, че докато старшият бит (най-вляво) е 0 се извършват всички битови обръщания на подброяча с дължина $n-1$, после се извършват n битови обръщания и от $0\,1\,1 \ldots 1\,1$ броячът става $1\,0\,0 \ldots 0\,0$ и после, докато старшият бит е 1, се извършват всички битови обръщания на подброяча с дължина $n-1$. И така:

$$
\begin{aligned}
&T_1 = 1 \\
&T_n = 2T_{n-1} + n \quad \text{за } n > 1
\end{aligned}
$$

Алтернативно, началното условие може да е $T_0 = 0$, ако допускаве празен брояч.

3. Решението е $T(n) = 2^{n+1} - n - 2$.

Зад. 2 Нека n е нечетно, тоест $n = 2k+1$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Разгледайте биномния коефициент $\binom{n}{k}$.

1. Докажете, че $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$.
2. Докажете, че $\binom{n}{k'} < \binom{n}{k}$ за всяко $k' < k$ и $\binom{n}{k''} < \binom{n}{k+1}$ за всяко $k'' > k+1$.
3. Докажете, че $\binom{n}{k}$ е нечетно число <u>тогава и само тогава</u>, когато $n = 2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$.

Решение:

1. $\binom{n}{k} = \binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} = \binom{2k+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$.
2.
$$\binom{n}{k'} < \binom{n}{k} \quad \leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)}{k'!} < \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad \leftrightarrow$$
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)}{k'!} < \frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)\,(n-k')\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots(k'+1)\,k'!} \quad \leftrightarrow$$
$$1 < \frac{(n-k')\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots(k'+1)} \quad \leftrightarrow \quad 1 < \frac{\prod_{i=k'}^{k-1} n-i}{\prod_{i=0}^{k-k'-1} k-i} \quad \leftrightarrow \quad 1 < \frac{\prod_{i=0}^{k-k'-1} n-k'-i}{\prod_{i=0}^{k-k'-1} k-i}$$
$$1 < \prod_{i=0}^{k-k'-1} \frac{n-k'-i}{k-i} \tag{1}$$
Но $\frac{n-k'-i}{k-i} > 1$, понеже $k > k'$ и $n > 2k$:
$$\frac{n-k'-i}{k-i} > 1 \ \leftrightarrow\ n-k'-i > k-i \ \leftrightarrow\ n-k' > k \ \leftrightarrow\ n > k+k'$$
Щом общият множител на произведението в дясната страна на неравенство (1) е по-голям от едно, то цялото произведение е по-голямо от едно и неравенството е вярно.

   Фактът, че $\binom{n}{k''} < \binom{n}{k+1}$, се доказва аналогично.
3. Разглеждаме $\binom{n}{k}$, което е $\binom{2k+1}{k}$:
$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)\cdots(k+3)(k+2)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$
Очевидно множителите в знаменателя в нарастващ ред, последвани от множителите в числителя в нарастващ ред, образуват нарастваща непрекъсната последователност от 1 до $2k+1 = n$ с едно изключение: липсва $k+1$.

   Сега да разгледаме естествените положителни числа в нарастващ ред и под всяко от тях, броят на неговите множители-двойки в червено:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	$\cdots$
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	$\cdots$

   Червената редица от броевете на множителите-двойки не е периодична, но лесно се забелязва следната закономерност. Да наречем червената редица $a_0, a_1, a_2, \cdots$. Тя е безкрайна, но всяка нейна **крайна** подредица $\mathcal{S}_p$ от p на брой последователни стойности, започваща от a_0:
$$\mathcal{S}_p = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$$

където p е число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$, се получава от "слепването" на подредицата $\mathcal{S}_{p-1}$, числото p, и отново подредицата $\mathcal{S}_{p-1}$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p-1}, p, \mathcal{S}_{p-1}$$

Ако кажем освен това, че $\mathcal{S}_0$ е 0, имаме индуктивна дефиниция за крайните редици $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ и така нататък:

$$\mathcal{S}_0 = 0$$
$$\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p-1}, p, \mathcal{S}_{p-1} \quad \text{за } p > 0$$

Примерно,

$$\mathcal{S}_0 = 0$$
$$\mathcal{S}_1 = 0, 1, 0$$
$$\mathcal{S}_2 = 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$$
$$\mathcal{S}_3 = 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$$
$$\mathcal{S}_4 = 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$$

Да се върнем на биномния коефициент

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)\cdots(k+3)(k+2)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Ключовото наблюдение е, че ако си представим редицата $1, 2, \cdots, k, k+1, k+2, k+3, \cdots, 2k+1$ **без** липсващо число, нейната съответна редица от бройките на множителите-двойки е част от някоя $\mathcal{S}_p$, която се простира от левия край на $\mathcal{S}_p$ донякъде.

Първо да допуснем, че $n = 2k+1$ е число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава липсващото число $k+1$ е 2^{m-1}. Твърдим, че в този случай бройките на множителите-двойки в числителя и в знаменателя са равни, от което веднага следва, че дробта е нечетно число. Да видим защо тези бройки са равни. Да съпоставим елемент по елемент редиците $1, 2, \ldots, 2k, 2k+1$ (без липсващо число) и $\mathcal{S}_{m-1}$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & 2k & 2k+1 \\ \mathcal{S}_{m-1} = & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & m-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

Както вече видяхме, $\mathcal{S}_{m-1}$ се състои от едно копие на $\mathcal{S}_{m-2}$, следвано от $m-1$, следвано от друго копие на $\mathcal{S}_{m-2}$. Но числото $k+1$, на което съответства $m-1$, липсва в биномния коефициент (такъв множител няма нито в числителя, нито в знаменателя), следователно няма множител нито в числителя, нито в знаменателя, който да има $m-1$ множителя-двойки. А за всеки от множителите в числителя има съответен множител в знаменателя, който има точно същия брой множители-двойки, което следва веднага от наличието на две копия на $\mathcal{S}_{m-2}$ в $\mathcal{S}_{m-1}$. Доказахме, че когато $n = 2k+1$ е число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$, биномният коефициент е нечетно число.

Да разгледаме алтернативата: $n = 2k+1$ **не е** число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Отново редицата от множителите-двойки за знаменателя и числителя е част от някое $\mathcal{S}_{m-1}$, но този път липсващото число $k+1$ съответства не на $m-1$, а на някой друг от "червените" елементи. Веднага се вижда, че бройките на множителите-двойки в числителя и в знаменателя не са равни, така че биномният коефициент е четен (знаем, че биномният коефициент е цяло число, така че няма как множителите-двойки в знаменателя да са повече; повечето множители-двойки са в числителя).

Зад. 3 Числата на Фибоначи се дефинират чрез следното рекурентно отношение:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{за } n > 1$$

1. Представете си стълба с n стъпала. Представете си човек, който изкачва стълбата. Той или тя или взема стъпалата едно по едно, или по две стъпала на веднъж, но не повече. Каква е връзката между броя на различните начини този човек да изкачи стълбата и числата на Фибоначи?

2. Представете си правоъгълник $2 \times n$ сантиметра и n на брой малки правоъгълничета 1×2 сантиметра. Покриване на големия правоъгълник с малките правоъгълничета е всяко тяхно слагане върху големия правоъгълник, такова че нито те се припокриват, нито остава непокрита част от големия правоъгълник. Очевидно бройката на малките правоъгълничета е достатъчна, за да покрием големия. Нещо повече, начините за покриване на големия са много, ако n е голямо число. Каква е връзката между начините да бъде покрит големия правоъгълник и числата на Фибоначи?

3. Докажете, че

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n}$$

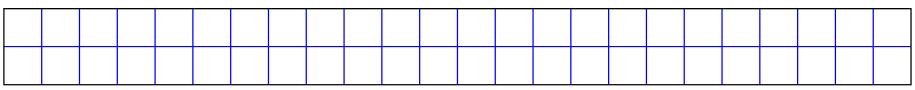
Решение:

1. Нека броят начини да изкачи стълба с n стъпала е S_n. Ако стъпалото е само едно, има един начин да качи стълбата. Ако стъпалата са две, има два начина: или с две малки стъпки (от по едно стъпало), или с една голяма крачка (две стъпала наведнъж). Така че $S_1 = 1$ и $S_2 = 2$.

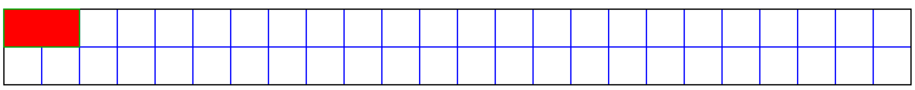
   При повече от две стъпала, може да започне или с една малка стъпка, при което ще остават $n-1$ стъпала, които може да се изкачат по S_{n-1} начина, или с една голяма крачка от две стъпала, при което ще остават $n-2$ стъпала, които може да се изкачат по S_{n-2} начина. Очевидно множеството от изкачванията се разбива на две подмножества: тези, които започват с малка стъпка, и тези, които започват с голяма крачка. По принципа на разбиването, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$.

   Виждаме, че $S_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$.

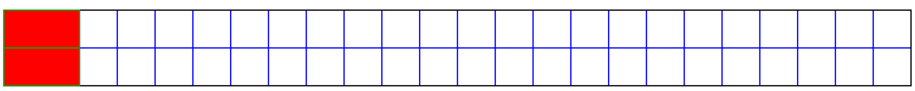
2. Нека броят на тези покривания е C_n. Да си представим големия правогълник нарисуван хоризонтално и покрит с квадратчета 1×1:

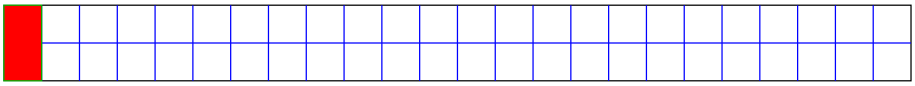
   Всяко от покриващите правоъгълничета трябва да покрие точно две съседни (с обща страна) квадратчета. Да си представим, че покриването започва отляво. Квадратчето в горния лав ъгъл трябва да бъде покрито. Има точно два начина да стане това. При първия начин:

   трябва задължително да продължим така:

и свеждаме задачата до задача за покриване на правоъгълник $2 \times (n-2)$. При втория начин:



свеждаме задачата до задача за покриване на правоъгълник $2 \times (n-1)$. Доказахме, че за всички достатъчно големи стойности на n, $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$. Очевидно $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$.

Виждаме, че $C_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$.

3. Ще докажем тъждеството с комбинаторни разсъждения. Нека T_n е броят на всички булеви вектори с дължина n, в които няма съседни единици. Ще покажем, че $T_n = F_{n+2}$ за всяко $n \geq 1$. Очевидно $T_1 = 2$, а $T_2 = 3$, защото от четирите булеви вектора с дължина 2, точно 11 не отговаря на условието.

   За $n > 2$, съобразяваме, че всеки такъв вектор може да започва с единица, но тогава вторият му елемент задължително е нула и следва булев вектор с дължина $n-2$ без съседни единици, или да започва с нула, като след нея има булев вектор с дължина $n-1$ без съседни единици. По принципа на разбиването, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$. Доказахме, че $T_n = F_{n+2}$ за всяко $n \geq 1$.

   Тогава F_{n+1} е T_{n-1}, така че лявата страна на тъждеството брои булевите вектори с дължина $n-1$ без съседни единици. Ще покажем, че дясната страна брои същото множество, но по-подробно.

   Един помощен факт: броят на булевите вектори с дължина $n-1$, които съдържат точно m единици (това означава, точно $n-1-m$ нули) и нямат съседни единици, е $\binom{n-m}{m}$. Това се показва много лесно. Първо да си представим единиците, написани в редица, като всяка от тях **без последната** бива следвана от нула (за да няма съседни единици). Значи имаме $m-1$ обекта от тип "единица-нула" $\boxed{10}$ и един обект от тип единица $\boxed{1}$; общо m обекта. Те са наредени така:

   $$\boxed{10} \quad \boxed{10} \quad \cdots \quad \boxed{10} \quad \boxed{1}$$

   $m-1$ нули са вече "заети" и остават $n-1-m-(m-1) = n-2m$ "свободни" нули, които "влизат" в "празните пространства" между и около споменатите обекти, за да оформят векторите. Празните пространства са $m+1$ на брой (защото обектите са m) и слагаме общо $n-2m$ нули в тях, като всяко слагане на нули ни дава точно един от желаните булеви вектори. Знаем, че можем да сложим $n-2m$ анонимни топки в $m+1$ именувани кутии по точно $\binom{n-2m+m+1-1}{m+1-1} = \binom{n-m}{m}$ начина.

   След като сме доказали помощния факт, решението е тривиално. Всяко събираемо вдясно брои точно векторите с дължина $n-1$, които имат m единици и нямат съседни единици, където $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. По принципа на събирането, сумата от тези бройки е точно броят на векторите с дължина $n-1$ без съседни единици. Някои от събираемите са нули, а именно тези, при които $n - m < m \leftrightarrow n < 2m$. Това има комбинаторен смисъл: при $n < 2m$ има нула вектора с дължина $n-1$ и точно m единици, които нямат съседни единици.

Зад. 4 Разгледайте всички думи с дължина 100 над българската азбука (има 30 букви). "Дума" в случая е всяка последователност от 100 букви, а не истинска дума от българския език (най-малкото, на български няма думи с толкова букви). Азбуката има естествена подредба на буквите от **а** към **я**.

- Колко са различните думи, в които срещащите се букви са във възходящ ред (отляво надясно)?
- Колко са различните думи, в които всяка буква се среща поне веднъж и буквите са във възходящ ред (отляво надясно)?
- Колко са различните думи, в които всяка буква се среща поне веднъж?
- Колко са различните думи, в която всяка гласна се среща поне веднъж? Гласните са $\boxed{\textbf{а}}$, $\boxed{\textbf{ъ}}$, $\boxed{\textbf{о}}$, $\boxed{\textbf{у}}$, $\boxed{\textbf{е}}$ и $\boxed{\textbf{и}}$.

Решение:

- Можем да мислим за тези думи като за мултимножества от по 100 елемента над опорно множество от 30 елемента. Това са конфигурации без наредба, с повтаряне и броят им е

$$\binom{100+30-1}{30-1} = 60\,284\,731\,216\,266\,553\,294\,577\,246\,880$$

- Можем да мислим за тези думи като за мултимножества от по 100 елемента над опорно множество от 30 елемента, като мултимножествата съдържат задължително поне по един елемент от опорното множеството. Очевидно тези мултимножества са колкото мултимножествата със $100-30=70$ елемента над опорно множество от 30 елемента. Броят е

$$\binom{70+30-1}{30-1} = 8\,811\,701\,946\,483\,283\,447\,189\,128$$

- Всяка от тези думи съответства на точно една сюрекция със 100 елементен домейн и 30 елементен кодомейн. С принципа на включването и изключването лесно се показва, че броят на сюрекциите с m елементен домейн и n елементен кодомейн е

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Тогава търсеният отговор е

$$\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} (30-k)^{100}$$

Численият отговор има 148 десетични цифри:

$$\begin{aligned}&1\,725\,811\,513\,043\,979\,316\,767\,735\,372\,054\,850\,360\,566\,139\\&\quad 467\,808\,929\,990\,837\,105\,470\,974\,552\,361\,365\,055\,161\,249\\&\quad 233\,420\,623\,865\,343\,547\,300\,656\,708\,665\,607\,104\,743\,811\\&\quad 933\,447\,546\,470\,400\,000\,000\end{aligned}$$

- Пак с принципа на включването и изключването, отговорът е

$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (30-k)^{100}$$

Като число, отговорът има 148 десетични цифри:

$$\begin{aligned}&4\,186\,848\,268\,232\,717\,069\,508\,448\,697\,546\,078\,643\,779\,703\\&\quad 210\,653\,217\,353\,880\,557\,117\,558\,817\,629\,650\,196\,245\,532\\&\quad 260\,080\,014\,829\,123\,140\,299\,115\,253\,887\,760\,051\,816\,719\\&\quad 640\,425\,081\,283\,359\,354\,880\end{aligned}$$