Упражнение 2

Двумерна задача на линейното оптимиране. Геометричен метод за решаване

Задачата на линейното оптимиране има просто геометрично тълкуване в двумерното пространство. При $n = 2$ тя има вида

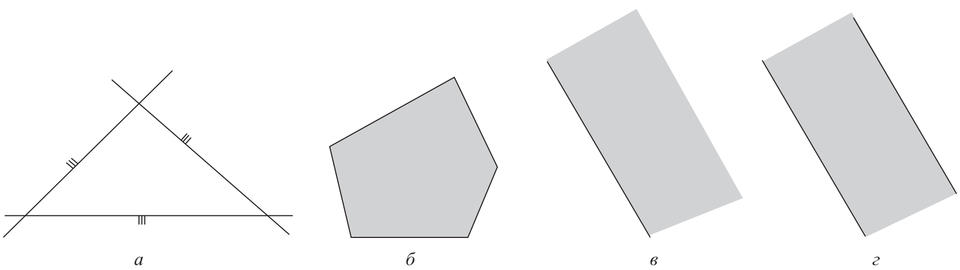
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\,(\min), \tag{1}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Ако има условия за неотрицателност на x_1 и x_2, те са включени в (2).

Нека в равнината е фиксирана координатна система x_1Ox_2. Допустимото множество P на задачата е сечението на полуравнините (2). То е изпъкнало, затворено многоъгълно множество и може да бъде празно (системата (2) е несъвместима, фиг. 1*а*), ограничено (изпъкнал многоъгълник, фиг. 1*б*) и неограничено (фиг. 1*в*, *г*, фиг. 2). Когато P е ограничено, контурът му се състои само от отсечки (ограничени ръбове), а когато е неограничено, той съдържа още и лъчи или прави (неограничени ръбове на P).

Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ и Oc е директрисата на вектора $\mathbf{c}$, разглеждана като числова ос с нула в точката O, положителна посока посоката на вектора $\mathbf{c}$ и единична отсечка за измерване, равна на тази в координатната система x_1Ox_2, то $z = \mathbf{cx} = \|\mathbf{c}\|\|\mathbf{x}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{c}\|\lambda_{\mathbf{x}'}$, където $\mathbf{x}'$ е ортогоналната проекция на $\mathbf{x}$ върху оста Oc, а $\lambda_{\mathbf{x}'}$ е алгебричната мярка на тази проекция, т. е. $\lambda_{\mathbf{x}'}$ е реалното число, което съответства на точката $\mathbf{x}'$, разглеждана като точка от оста Oc. Тук и навсякъде по-нататък дадена точка и



Фиг. 1. Примери на двумерни допустими множества:
а) празно допустимо множество, б) ограничено допустимо множество,
в) и г) неограничени допустими множества без върхове

нейният радиус-вектор се означават по един и същи начин. Освен това всички вектори се разглеждат като вектор-стълбове. В повечето случаи векторите ще бъдат писани като вектор-редове, последвани от знак за транспониране (за икономия на място).

Задача (1)–(2) може да се изкаже геометрично така: търси се точка $\mathbf{x} \in P$, чиято проекция $\mathbf{x}'$ върху оста Oc има най-голяма (най-малка) алгебрична мярка $\lambda_{\mathbf{x}'}$. Задачата може да се реши така:

1. Построява се допустимото множество P на задачата. Ако $P = \emptyset$, задачата няма решение.

2. Построяват се векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ и директрисата му Oc. Проектира се множеството P върху оста Oc. Проекцията P' на P е отсечка (ако P е ограничено), лъч или права.

3. Определят се точките, чиито проекции имат максимална (минимална) алгебрична мярка. Те са решение на задачата.

   - Ако P' е отсечка, това са точките, чиито проекции съвпадат с втория (първия) край на отсечката. Тогава задачата има решение при търсене както на максимум, така и на минимум.
   - Ако P' е лъч, еднопосочен (противоположен) на вектора $\mathbf{c}$, алгебричните мерки на проекциите растат (намаляват) неограничено в P и задачата за търсене на максимум (минимум) няма решение (фиг. 2). Точките, чиито проекции съвпадат с началната точка на лъча, имат най-малка (най-голяма) алгебрична мярка на проекцията си и са решение на задачата за минимум (максимум).
   - Ако P' е права, алгебричните мерки на проекциите растат и намаляват неограничено отгоре и отдолу в P' и задачата няма решение при търсене и на максимум, и на минимум.

В общия случай задачата на линейното оптимиране има вида

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\,(\max)$$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \lesseqqgtr b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p \ (p \leq n).$$

Тук знакът $\lesseqqgtr$ означава някой от знаците $\le$, $\ge$ или $=$. Тази задача може да бъде сведена до двумерната задача (1)–(2) и да бъде решена геометрично, ако сред ограниченията ѝ има r линейно независими уравнения и $n - r \le 2$ (вж. пример 1).

Пример 1. Да се реши геометрично задачата

$$z = x_2 - x_3 + x_4 \to \max\,(\min), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &\le 4, \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= -3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_3 \ge 0,\ x_4 &\ge 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Решение. Тук $n = 4$ и $r = 2$, което позволява да изразим две от променливите чрез другите две и така да сведем задачата до двумерния случай:

$$\begin{aligned} x_4 &= -x_1 + 2x_2 + 2, \\ x_3 &= x_1 + x_2 + 1. \end{aligned} \tag{5}$$

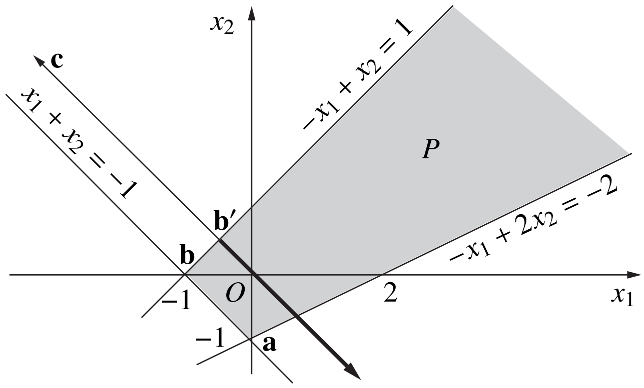
Заместваме x_3, x_4 в (3), (4) и получаваме двумерната задача

$$\bar{z} = -2x_1 + 2x_2 + 1 \to \max\,(\min),$$

$$P : \left| \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\ge -1 \\ -x_1 + 2x_2 &\ge -2. \end{aligned} \right.$$

Допустимото множество на задачата е дадено на фиг. 2. То има два върха $\mathbf{a} = (0, -1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b} = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Константата в целевата функция е без значение при търсенето на точките, в които функцията достига максимум или минимум. Тя се взема предвид само при пресмятане на стойността на функцията след намирането на тези точки.

Построяваме вектора $\mathbf{c} = (-2, 2)^{\mathrm{T}}$ и оста Oc и проектираме множеството P върху нея (фиг. 2). Множеството от проекциите на точките от P е лъч с начало точката $\mathbf{b}'$. На фиг. 2 той е начертан по-плътно. Точката $\mathbf{b}'$ е проекция на върха $\mathbf{b}$ и на всички точки от неограничения ръб, излизащ от $\mathbf{b}$. Тъй като $\mathbf{b}'$ има най-голяма алгебрична мярка (Oc е числова ос), то точките от този неограничен ръб са оптимални решения на задачата при търсене на максимум. В частност оптимално решение е върхът $\mathbf{b} = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Общият вид на решенията е $\bar{\mathbf{x}}_\lambda = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{p} = (\lambda - 1, \lambda)^{\mathrm{T}}$, където $\mathbf{p} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ е направляващ вектор на ръба и $\lambda \ge 0$, т. е. двумерната задача има безбройно много решения



Фиг. 2

$\overline{\mathbf{x}}_\lambda$ и $\overline{z}^* = 3$. Изходната задача има също безбройно много решения $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda, 3+\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \geq 0$, където последните две координати са пресметнати от (5).

При търсене на минимум задачата няма решение: алгебричните мерки намаляват неограничено, следователно целевата функция е неограничена отдолу в P ($\underline{z}^* = -\infty$).

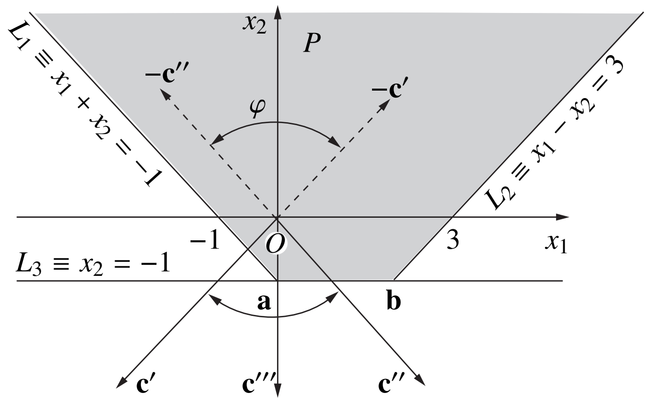
Пример 2. Да се изследва при какви стойности на ъгъла между оста Ox_1 и вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ задачата за намиране на максимум (минимум) на функцията $z = c_1x_1 + c_2x_2$ в множеството

$$P : \left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \geq & -1 \end{array} \right.$$

има оптимално решение.

Решение. Множеството P (фиг. 3) е неограничено с върхове $\mathbf{a} = (0, -1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b} = (2, -1)^{\mathrm{T}}$. Неограничени ръбове на P са лъчите съответно с начало точките $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Ако векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ сключва остър ъгъл с някой от неограничените ръбове, алгебричните мерки на проекциите ще растат неограничено, т. е. z ще бъде неограничена отгоре в множеството P. На фиг. 3 са дадени двете гранични положения за вектора $\mathbf{c}$, при които задачата има решение: при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ имаме $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}') = \frac{5}{4}\pi$, а при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ съответно $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}'') = \frac{7}{4}\pi$. Векторите $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ са перпендикулярни съответно на правите L_1, L_2 и сочат навън от множеството P.

Задачата за максимум има оптимално решение за $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}') \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ ($c_1 = c_2 < 0$) оптимални решения са всички точки $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, \lambda - 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \geq 0$, от лъча с начало точката $\mathbf{a}$ и направляващ вектор $(-1, 1)^{\mathrm{T}}$ и



Фиг. 3

$z^* = -c_2$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ ($c_1 = -c_2 > 0$) оптимални решения са всички точки $\mathbf{x}_\lambda = (2 + \lambda, \lambda - 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \geq 0$, от лъча с начало точката $\mathbf{b}$ и направляващ вектор $(1, 1)^{\mathrm{T}}$ и $z^* = 3c_1$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'''$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$) решения са всички точки $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = (2-2\lambda, -1)^{\mathrm{T}}$ на отсечката $\mathbf{ab}$ и $z^* = -c_2$. Когато $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}) \in \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, оптимално решение е само върхът $\mathbf{a}$. Когато $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}) \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$, решение е само върхът $\mathbf{b}$.

Аналогични разсъждения показват, че при търсене на минимум трябва да се вземат вектори, перпендикулярни на неограничените ръбове, но сочещи навътре в множеството P — в нашия случай това са векторите $-\mathbf{c}'$ и $-\mathbf{c}''$, начертани на фиг. 3 с пунктир. Задачата за минимум има оптимално решение при $\sphericalangle(Ox_1, c) \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$.

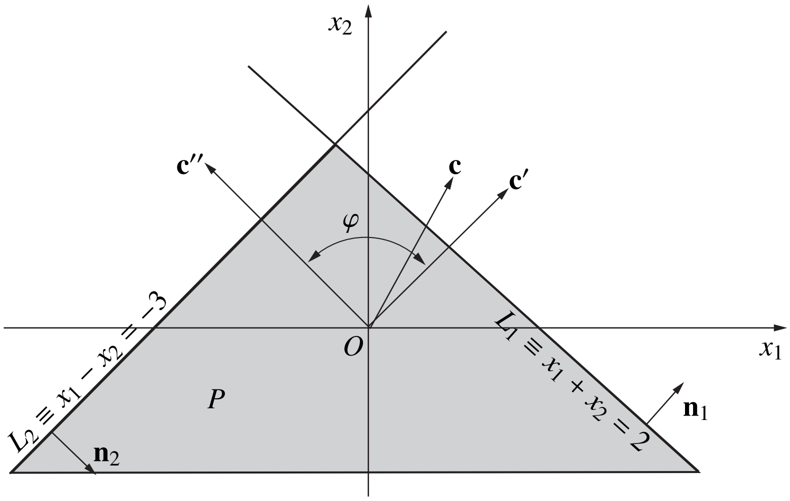
Пример 3. За кои стойности на параметъра λ задачата

$$z = \lambda x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$P : \left| \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 - x_2 & \geq & -3. \end{array} \right.$$

има оптимално решение?

Решение. Множеството P е дадено на фиг. 4. Построяваме векторите $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$, съответно перпендикулярни на неограничените ръбове и сочещи навън от множеството P. Задачата има оптимално решение, когато векторът $\mathbf{c} = (\lambda, 2)^{\mathrm{T}}$ се мени от $\mathbf{c}'$ до $\mathbf{c}''$ в ъгъла φ. Векторът $\mathbf{c}'$ е еднопосочен с нормалния вектор $\mathbf{n}_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ на правата L_1 и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ ще имаме $\mathbf{c}' = k\mathbf{n}_1$, $k > 0$. Векторът $\mathbf{c}''$ е противоположен на нормалния вектор $\mathbf{n}_2 = (1, -1)^{\mathrm{T}}$ на правата L_2 и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ получаваме $\mathbf{c}'' = -k\mathbf{n}_2$, $k > 0$, откъдето $\mathbf{c}'' = (-2, 2)^{\mathrm{T}}$. Следователно задачата има оптимално решение за $-2 \leq \lambda \leq 2$.



Фиг. 4

Задачи

1. Да се решат геометрично следващите задачи за намиране на максимум и минимум на функцията z. Да се намерят всички оптимални решения.

1.1.
$$
\begin{array}{rcrcl}
 & & z = 2x_1 + x_2, & & \\
-x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3, \\
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12, \\
2x_1 & - & x_2 & \leq & 6, \\
 & & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; & &
\end{array}
$$

1.2.
$$
\begin{array}{rcrcl}
 & & z = x_2, & & \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 1, \\
3x_1 & & & \geq & -6, \\
2x_1 & - & x_2 & \leq & 4, \\
 & & x_2 & \geq & 0;
\end{array}
$$

1.3.
$$
\begin{array}{rcrcl}
 & & z = 3(x_2 - x_1), & & \\
x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0, \\
x_1 & - & x_2 & \geq & -1, \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 1;
\end{array}
$$

1.4.
$$
\begin{array}{rcrcl}
 & & z = x_1, & & \\
x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0, \\
-x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 1;
\end{array}
$$

1.5.
$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
 & & & & z = x_1 - x_2 + x_3, & & & & \\
2x_1 & - & x_2 & & & & & \geq & 4, \\
x_1 & & & & & - & x_4 & = & 4, \\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\
x_1 & & & & & + & x_4 & \leq & 2, \\
 & & & & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; & & & &
\end{array}
$$

1.6.
$$
\begin{array}{rcrcrcl}
 & & z = x_1 + 2x_2 - x_3, & & & & \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5, \\
x_1 & & & + & 3x_3 & \geq & 3, \\
-4x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4, \\
 & & x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0; & & & &
\end{array}
$$

1.7.
$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 2x_2, \\ -x_1 + x_2 &\le 1, \\ x_1 - x_2 &\le 1; \end{aligned}$$

1.8.
$$\begin{aligned} z &= x_1 - x_2 + x_3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \qquad &= -2, \\ x_j \ge 0,\ j &= 1, \dots, 4; \end{aligned}$$

1.9.
$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= n, \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n &= n - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 3, \\ x_j \ge 0,\ j &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2. Да се определят границите на изменение на ъгъла α, който трябва да сключва векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ с абсцисната ос Ox_1, за да има функцията $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ максимум (минимум) в дадените по-долу множества. Да се определи общият вид на всички оптимални решения при търсене на максимум в зависимост от α.

2.1. $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 0 \\ x_1 \quad &\le 0 \\ x_2 &\le 1; \end{aligned} \right.$ **2.2.** $\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 \quad &\le 1 \\ x_2 &\ge -1; \end{aligned} \right.$ **2.3.** $\left| \begin{aligned} & x_1 + x_2 \le 1 \\ & 0 \le x_2 \le 1; \end{aligned} \right.$

2.4. $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 0 \\ x_1 - x_2 &\ge 0; \end{aligned} \right.$ **2.5.** $\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_1 + x_2 &\ge 1 \\ x_2 &\ge 0; \end{aligned} \right.$ **2.6.** $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\ge 1. \end{aligned} \right.$

3. За дадените множества P и функцията $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ да се определят:

а) границите на изменение на ъгъла α между абсцисната ос Ox_1 и вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$, за който z е неограничена едновременно отгоре и отдолу в P;

б) c_1 и c_2 така, че z да достига максимума си в два върха на P; да се намери общия вид на оптималните решения.

3.1. $P:$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

3.2. $P:$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le -2 \\ -x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 - 2x_2 &\le -4. \end{aligned}$$

4. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които следващите задачи имат оптимално решение. В задачи 4.4 и 4.6 да се определи при кои стойности на a множеството, определено от ограниченията, е празно.

4.1. $z = ax_1 - 2x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 3,\\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 0,\\ x_2 &\ge -1; \end{aligned}$$

4.2. $z = ax_1 - 2x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 2,\\ x_1 - x_2 &\le 1; \end{aligned}$$

4.3. $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 4,\\ x_1 - x_2 &\le 6,\\ ax_1 + x_2 &\le 3,\\ x_1 \ge 0,&\ x_2 \ge 0; \end{aligned}$$

4.4. $z = x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 9,\\ x_1 - 3x_2 &\le 1,\\ ax_1 - x_2 &\le -2,\\ x_1 \ge 0,&\ x_2 \ge 0; \end{aligned}$$

4.5. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1,\\ 2x_1 + ax_2 + x_3 &= 2,\\ x_3 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.6. $z = x_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le a,\\ 0 \le x_1 &\le 1,\\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

5. Да се определи за кои стойности на параметъра a функцията $z = x_1 + ax_2$ има максимална стойност нула в множеството

$$P : \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} : x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 1\}.$$

Да се намерят всички оптимални решения.

6. Да се реши задачата за посочените стойности на параметъра a:

6.1. $z = ax_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\ge -7,\\ x_1 + x_2 &\le 5,\\ x_1 - x_2 &\ge -1,\\ a \in \left[\tfrac{1}{3}, +\infty\right)&; \end{aligned}$$

6.2. $z = ax_1 - x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4,\\ x_1 - 3x_2 &\le 5,\\ x_1 - 2x_2 &\le 6,\\ a \in \left(-\infty, \tfrac{1}{3}\right]&. \end{aligned}$$

7. За кои стойности на параметъра a:

а) оптималното решение остава в един и същ връх на P;

б) задачата няма оптимално решение;

в) задачата има безбройно много оптимални решения?

7.1. $z = 2x_1 + ax_2 \to \max,$

$$P: \left| \begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \le & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & \le & 15 \\ x_1 & + & 2x_2 & \le & 12 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;} \end{array} \right.$$

7.2. $z = -x_1 + ax_2 \to \max,$

$$P: \left| \begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \le & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & \le & 3 \\ \multicolumn{5}{l}{x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.} \end{array} \right.$$

8. Да се съставят задачи на ЛО, които да имат едно от следните свойства (с P и z са отбелязани съответно допустимото множество и целевата функция):

а) задачата има единствено оптимално решение;

б) задачата има безбройно много оптимални решения;

в) $z \to +\infty$ в P, но задачата за минимум на z в P има единствено оптимално решение;

г) $z \to -\infty$ и $z \to +\infty$ в P;

д) $P = \emptyset$;

е) $z \to -\infty$ в P, но задачата за максимум на z в P има безбройно много оптимални решения.

Отговори и решения

1.1. max: $\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 9$; min: $(0,0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 0$.

1.2. max: $z \to +\infty$ в допустимото множество; min: $\mathbf{x}_\lambda = (2-\lambda, 0)^{\mathrm{T}}$ за $0 \le \lambda \le 1$, $z^* = 0$.

1.3. max: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, 1+\lambda)^{\mathrm{T}}$ за $\lambda \ge 0$, $z^* = 3$; min: $z \to -\infty$ в допустимото множество.

1.4. max: $z \to +\infty$ в допустимото множество; min: $(0,1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 0$.

1.5. max: $(3,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 4$; min: $(3,2,-1,-1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 0$.

1.6. max: $\mathbf{x}_\lambda = (6-6\lambda, 4\lambda, 2\lambda-1)^{\mathrm{T}}$, $0 \le \lambda \le 1$; min: $\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{24}{5}\right)$, $z^* = -\frac{23}{5}$.

1.7. max: оптимални решения са всички точки от правата $x_1 - x_2 = 1$, в частност $\overline{\mathbf{x}} = (1,0)^{\mathrm{T}}$; при направляващ вектор $\mathbf{p} = (1,1)^{\mathrm{T}}$ на тази права оптималните решения са $\mathbf{x}_\lambda = \overline{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{p} = (1+\lambda, \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $z^* = 2$; min: оптимални решения са всички точки от правата $-x_1 + x_2 = 1$, в частност $\overline{\mathbf{y}} = (0,1)^{\mathrm{T}}$; общият вид на оптималните решенията е $\mathbf{x}_\lambda = \overline{\mathbf{y}} + \lambda\mathbf{p} = (\lambda, 1+\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $z^* = -2$.

1.8. max: $z \to +\infty$ в P; min: $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 2\right)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -\frac{1}{2}$.

1.9. От системата уравнения имаме $x_{n-2} = 3 - (x_{n-1} + x_n)$ и $x_k = 1$ за $k = 1, \dots, n-3$; двумерната задача е

$$\max\left\{\bar{z} = \frac{1}{2}(n^2 + n - 6) + x_{n-1} + 2x_n : x_{n-1} + x_n \le 3,\ x_{n-1} \ge 0,\ x_n \ge 0\right\},$$

откъдето получаваме оптимално решение за максимум $(1,1,\dots,1,0,0,3)^{\mathrm{T}}$, $z^* = \frac{1}{2}(n^2+n+6)$ и за минимум — $(1,1,\dots,1,3,0,0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = \frac{1}{2}(n^2+n-6)$.

2.1. max: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; при $\alpha = 0$ ($c_2 = 0$, $c_1 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (0, -\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $(0,0)^{\mathrm{T}}$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$, $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $(-1,1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -c_1 + c_2$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-1-\lambda, 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

2.2. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; при $\alpha = 0$ ($c_2 = 0$, $c_1 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1, \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ($c_1 = -c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, \lambda - 1)^\mathrm{T}$, $0 \le \lambda \le 1$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right]$: $(0, 1)^\mathrm{T}$, $z^* = -c_2$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, -1)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = -c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2.3. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1 - \lambda, 0)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, 1 - \lambda)^\mathrm{T}$, $0 \le \lambda \le 1$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $(0, 1)^\mathrm{T}$, $z^* = c_2$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 > 0$) $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, 1)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2.4. max: $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$; при $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$: $(0, 0)^\mathrm{T}$; при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, -\lambda)^\mathrm{T}$ за $\lambda \ge 0$; във всички случаи $z^* = 0$; min: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.5. max: $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$; при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ($c_1 = -c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = \left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} + \lambda\right)$, $\lambda \ge 0$; $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z^* = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$; при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda\right)^\mathrm{T}$, $\lambda \in [0, 1]$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1 + \lambda, 0)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = 0$; min: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.6. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, 1)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = c_2$; при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1 - \lambda, \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.1. а) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$; б) при $c_1 = c_2 = k < 0$, т. е. $\mathbf{c} = (k, k)^\mathrm{T}$: $\mathbf{x}_\lambda = \left(4 - \frac{9}{2}\lambda, \frac{9}{2}\lambda\right)^\mathrm{T}$, $\lambda \in [0, 1]$.

3.2. а) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; б) при $c_1 = -\frac{c_2}{2} = k > 0$, т. е. $\mathbf{c} = (k, -2k)^\mathrm{T}$ за $k > 0$: $\mathbf{x}_\lambda = (-4\lambda, 2 - 2\lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \in [0, 1]$.

4.1. $-\frac{4}{3} \le a \le 2$.

4.2. $a \ge 2$.

4.3. $a > -1$.

4.4. $-\frac{1}{4} \le a < \frac{1}{3}$; $P = \emptyset$ за $-\infty < a < \frac{1}{4}$.

4.5. $\frac{1}{2} \leq a < 2$.

4.6. $a = 0$; $P = \emptyset$ за $a < 0$.

5. $0 \leq a \leq 1$; при $a = 0$; $\mathbf{x}_\lambda = (0, -\lambda)^T$, $\lambda \geq 0$; при $a = 1$: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda - 1, 1 - \lambda)^T$, за $\lambda \in [0, 1]$; при $a \in (0, 1)$: $(0, 0)^T$.

6.1. $a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$: $z^* = 2a - 3$, $\mathbf{x}^* = (2, 3)^T$; $a \in (1, \infty)$: $z^* = -\infty$.

6.2. $a \in (-\infty, -1)$: $z^* = +\infty$; $a \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$: $z^* = 2a + 1$, $\mathbf{x}^* = (2, -1)^T$.

7.1. а) върховете: $(5, 0)^T$ за $a \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $(6, 3)^T$ за $a \in \left[-\frac{2}{3}, 4\right]$, $(2, 5)^T$ за $a \in [4, +\infty)$; б) няма такива a; в) $a = -\frac{2}{3}$, $a = 4$.

7.2. а) върховете: $(0, 0)^T$ за $a \in (-\infty, 0)$, $(0, 2)^T$ за $a \in [0, 1]$; б) $a \in (1, +\infty)$; в) $a = 0$, $a = 1$.

8. а) например зад. 1.1; б) например зад. 1.6 за максимум; в) например зад. 1.4; г) например зад. 1.7, но с $c_1 \neq -c_2$ в z: например $z = 2x_1 + 3x_2$; д) например $P = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T : -x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 - x_2 \geq 1\}$; е) например зад. 1.3.

Упражнение 3

Обща и канонична задача на линейното оптимиране. Канонично многостенно множество

1. Обща и канонична задача на ЛО

Произволна задачата на ЛО може да се запише в следния вид:

Търси се минимумът на функцията

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничения (условия)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = 1, \dots, s, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = s+1, \dots, m, \tag{3}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \dots, p \quad (p \le n). \tag{4}$$

Функцията (1) се нарича *целева функция*. Променливите, на които не е наложено условие за неотрицателност, се наричат *свободни променливи*. В случая такива са $x_{p+1}, \dots, x_n$.

Определение 1. *Допустима точка* на задачата се нарича всяко решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ на системата (2)–(4).

Определение 2. *Допустимо множество* на задачата се нарича множеството P от всички решения на системата (2)–(4).

P е изпъкнало затворено многостенно множество.

Ако задачата е за търсене на максимум на функцията (1) в множеството (2)–(4), тя е еквивалентна на задачата за търсене на минимум на $-z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j$ в същото множество. Двете задачи имат едно и също допустимо множество, като търсената максимална стойност на целевата функция се получава чрез умножаване с -1 на намерената минимална стойност на $-z$. Ако има ограничение от вида $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$, то е еквивалентно на $\sum_{j=1}^{n} (-a_{ij}) x_j \le -b_i$.

В случай че $s = 0$ и $p = n$, т. е. когато всички ограничения са равенства и всички променливи са неотрицателни, задачата на линейното оптимиране

$$\text{(K)}\qquad \begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i, \qquad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \qquad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

където $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, се нарича *канонична задача* (КЗ). Нека $\mathbf{A}$ е матрицата с елементи a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ е векторът с коефициентите в целевата функция, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ е векторът с неизвестните, а $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ е векторът с десните страни на ограниченията. Тогава каноничната задача на линейното оптимиране има следния вид: $\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

2. Алгоритъм за свеждане на произволна задача на ЛО към канонична задача на ЛО

Нека е дадена задачата (1)–(4). Всяко ограничение неравенство (2) се свежда към ограничение равенство чрез добавяне на нова неотрицателна допълнителна променлива $x_{n+i} \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, в лявата му страна

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Ограничение от тип $\geq$ се превръща директно в равенство (без да се умножава предварително с -1) чрез *изваждане* на допълнителната променлива от лявата му страна. Така броят на променливите се увеличава с s, защото всяко ограничение неравенство води до нова допълнителна променлива.

Ако някоя дясна страна b_i, $i = 1, \dots, m$, е отрицателна, равенството се умножава с -1.

Всяка *свободна променлива* се замества с разликата на две неотрицателни променливи по един от следните два начина:

1. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$, $j = p+1, \dots, n$. При този начин броят на променливите се увеличава с $n - p$.

2. $x_j = x_j^+ - \xi$, $x_j^+ \geq 0$, $\xi \geq 0$, $j = p+1, \dots, n$. При този начин броят на променливите се увеличава с 1 независимо от това колко е $n - p$.

Така от задача (1)–(4) се получава следната задача

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} c_j (x_j^+ - x_j^-) \tag{5}$$

при ограничения (условия)

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x_j^+ - x_j^-) + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, \dots, s, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x_j^+ - x_j^-) = b_i, \qquad i = s+1, \dots, m, \tag{7}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, p,\ x_j^+, x_j^- \geq 0,\ j = p+1, \dots, n, \quad x_{n+i} \geq 0,\ i = 1, \dots, s. \tag{8}$$

Задачите (1)–(4) и (5)–(8) са *еквивалентни*. Това означава, че те едновременно са разрешими или неразрешими (доказва се с допускане на противното). Ако $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}^+, \bar{x}_{p+1}^-, \dots, \bar{x}_n^+, \bar{x}_n^-, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_{n+s})^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задача (5)–(8), то $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на (1)–(4), където

$$x_j^* = \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, p, \qquad x_j^* = \bar{x}_j^+ - \bar{x}_j^-, \quad j = p+1, \dots, n.$$

Така на всяка задача (1)–(4) по единствен начин се съпоставя еквивалентна на нея канонична задача (5)–(8).

Пример 1. Да се приведе в каноничен вид задачата

$$\begin{aligned}
z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\to \max,\\
2x_1 - x_2 \phantom{{}+ 4x_3} &= -3,\\
x_1 \phantom{{}- x_2} - x_3 &\geq 1,\\
x_1 \phantom{{}- x_2} + 4x_3 &\leq 4,\\
x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Решение. Свободната променлива се замества с разликата на две неотрицателни променливи $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_2^+ \geq 0$, $x_2^- \geq 0$, както в целевата функция, така и в ограниченията. Целевата функция се умножава с -1, а критерият става минимум. Първото ограничение също се умножава с -1 заради отрицателната му дясна страна. Изважда се допълнителна променлива $x_4 \geq 0$ от лявата страна на второто ограничение. Прибавя се допълнителна променлива $x_5 \geq 0$ в лявата страна на третото ограничение. Така второто и третото ограничение се превръщат в равенства. Търсената канонична задача е

$$
\begin{aligned}
&\bar{z} = -z = -3x_1 + x_2^+ - x_2^- - 2x_3 \to \min,\\
&-2x_1 + x_2^+ - x_2^- = 3,\\
&x_1 - x_3 - x_4 = 1,\\
&x_1 + 4x_3 + x_5 = 4,\\
&x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

3. Канонично многостенно множество

Определение 3. Допустимо множество M на канонична задача на линейното оптимиране се нарича *канонично* (*многостенно*) *множество*. С други думи нека $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$. Ще предполагаме, че $M \neq \emptyset$ и $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$, т. е. между ограниченията няма линейно зависими. Ясно е също така, че $m \leq n$.

Определение 4. Нека M е непразно канонично множество и $\mathbf{B}$ е неособена $m\times m$ матрица, съставена от m линейно независими стълба на матрицата $\mathbf{A}$. Векторът $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix}$, където $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-m}$ се нарича *базисно решение* спрямо базис (базисна матрица) $\mathbf{B}$.

За всяко базисно решение е изпълнено $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, но то може да не бъде точка от M, ако има отрицателна(и) координата(и).

Определение 5. Ако $\bar{\mathbf{x}}_B \geq \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}}$ се нарича *базисно допустимо решение* (бдр) (защото $\bar{\mathbf{x}}$ тогава е допустима точка).

Теорема 1. Ако $M \neq \emptyset$, следните твърдения са еквивалентни:

а) $\bar{\mathbf{x}}$ е връх на M, т. е. $\bar{\mathbf{x}}$ не е вътрешна точка за нито една отсечка, чиито краища са различни точки от множеството M.

б) $\bar{\mathbf{x}}$ е бдр.

в) $\bar{\mathbf{x}}$ е допустима точка, като на ненулевите (положителните) ѝ координати съответстват линейно независими стълбове на матрицата $\mathbf{A}$.

Забележка. Като се има предвид, че $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$, броят на ненулевите (положителните) координати на един връх $\bar{\mathbf{x}}$ на непразно канонично множеството M не може да бъде по-голям от m.

Теорема 2. Ако $M \neq \emptyset$ е канонично множество, то M има връх.

Определение 6. Нека $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ е връх на M и $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$. Матрицата $\mathbf{B}$ се нарича *базис* на $\bar{\mathbf{x}}$, а представянето на множеството M във вида $\{\mathbf{x} : \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ — *базисно представяне* спрямо върха $\bar{\mathbf{x}}$ (спрямо базиса $\mathbf{B}$). Тогава $\mathbf{x}_B$ се наричат *базисни координати*, а $\mathbf{x}_N$ — *небазисни координати*.

Определение 7. Един връх $\bar{\mathbf{x}}$ на непразно канонично множество се нарича *неизроден*, ако $\bar{\mathbf{x}}_B > \mathbf{0}$. В противен случай $\bar{\mathbf{x}}$ се нарича *изроден*.

Следствие 1. Всеки неизроден връх $\bar{\mathbf{x}}$ има *единствен базис*, състоящ се от онези m стълба на матрицата $\mathbf{A}$, които съответстват на положителните му координати. Един изроден връх $\bar{\mathbf{x}}$ в общия случай има повече от един базис. Всеки такъв базис включва стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$, съответстващи на ненулевите координати на $\bar{\mathbf{x}}$, допълнени до m на брой с някои от другите стълбове на $\mathbf{A}$ по такъв начин, че получената съвкупност от стълбове да бъде линейно независима.

При изроден връх някои от базисните му координати са равни на нула. Прието е те да се наричат *базисни нули*.

При направените предположения $M \neq \emptyset$, $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$, от всеки връх на M излизат точно $n - m$ ръба на M. Ръбовете, излизащи от върха $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, се представят във вида

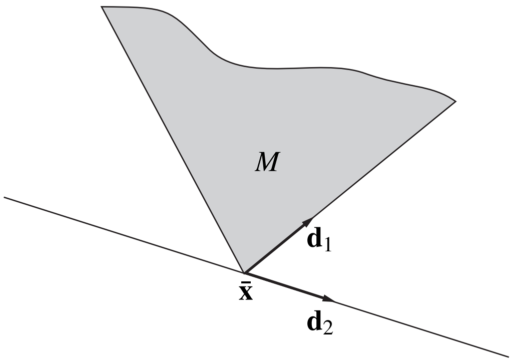
$$(9) \qquad \{\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j,\ t \geq 0\} \subset M, \qquad \mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}, \quad j \in N,$$

където N е множеството от индексите на небазисните променливи и $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^{n-m}$ е j-тият единичен вектор.

Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е неизроден връх, той има единствен базис $\mathbf{B}$. Това позволява еднозначно да се определят $n - m$-те посоки на ръбовете, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, като на небазисната променлива x_j, $j \in N$, се съпостави векторът $\mathbf{d}_j$ от (9). При движение по посока на вектора $\mathbf{d}_j$ небазисната променлива x_j, $j \in N$, нараства от 0 до някакво число $\bar{t} > 0$. За построяването на вектора $\mathbf{d}_j$ се използва стълбът от коефициенти $\mathbf{w}_j = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}]_j$ в базисното представяне $\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ спрямо $\bar{\mathbf{x}}$.

Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх, възможно е числото $\bar{t} = 0$. Тогава можем да кажем, че освен действителни посоки от $\bar{\mathbf{x}}$ излизат и фиктивни, т. е. такива, за които $\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j \notin M$ за $t > 0$. Този факт геометрично е представен на фиг. 1. Там $\mathbf{d}_1$ е действителна посока, а $\mathbf{d}_2$ — фиктивна.

За да определим действителните посоки $\mathbf{d}_j$, $j = 1, \ldots, n - m$, на изроден връх $\bar{\mathbf{x}}$, се налага да се изследват посоките, които се получават от всички



Фиг. 1. Действителна и фиктивна посоки от изроден връх

базисни представяния на $\bar{\mathbf{x}}$.

Ръбовете на допустимото множество могат да бъдат ограничени или неограничени. Ако един ръб е ограничен, това е отсечка, която свързва два върха на допустимото множество. Разпознаването на това дали един ръб на допустимото множество е ограничен или неограничен става лесно. Ако $\mathbf{d}_j \geq \mathbf{0}$, тогава $\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j \geq \mathbf{0}$ за всяко $t \geq 0$. Но $\mathbf{d}_j \geq \mathbf{0}$ точно когато $\mathbf{w}_j \leq \mathbf{0}$. В последния случай векторът $\mathbf{d}_j$ е *посока* за допустимото множество.

Пример 2. Да се определи кои от векторите

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1 &= (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{x}^2 &= \left(1, 0, 0, \tfrac{6}{5}, \tfrac{1}{5}\right)^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{x}^3 &= (0, 1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{x}^4 &= (0, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

са върхове на множеството

$$M : \left|\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2\\
-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.
\end{array}\right.$$

Решение. За да се установи кои от дадените вектори са върхове на даденото канонично многостенно множество M, се използва Теорема 1. Чрез непосредствена проверка се установява, че и четирите точки са допустими. Тъй като матрицата $\mathbf{A}$ в този случай има вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

очевидно е, че $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$ (има неособена квадратна подматрица от ред 2, например тази, получена от първите два стълба на $\mathbf{A}$). Тъй като векторът $\mathbf{x}^2$ има три ненулеви (положителни) координати, той не може да бъде връх, защото трите стълба $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ на матрицата $\mathbf{A}$ са линейно зависими.

Векторът $\mathbf{x}^1$ има две ненулеви координати и съответните стълбове $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ на матрицата $\mathbf{A}$ са линейно независими. Следователно $\mathbf{x}^1$ е неизроден връх с базис $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{x}_B^1 = [x_1, x_5]$.

Векторът $\mathbf{x}^3$ има две ненулеви координати и съответните стълбове $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ на матрицата $\mathbf{A}$ са линейно зависими. Следователно $\mathbf{x}^3$ не е връх.

Векторът $\mathbf{x}^4$ има една ненулева координата и съответният ѝ стълб от матрицата $\mathbf{A}$ е $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следователно $\mathbf{x}^4$ е изроден връх. Лесно се проверява, че $\mathbf{x}^4$ има три базиса: $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$, $\mathbf{B}_3 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5]$.

Пример 3. Да се намерят всички върхове и ръбовете, излизащи от тях, на множеството

$$M : \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ \multicolumn{9}{l}{x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.} \end{array} \right. \tag{10}$$

Решение. Всички възможни базиси (съответните подматрици са неособени) са: $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$, $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4]$, $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$, $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$.

Последователно се построяват съответните базисни представяния на множеството M спрямо изброените по-горе базиси.

а) За построяването на базисното представяне на M спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ системата (10) се решава спрямо променливите x_1 и x_2, като се използва методът на Гаус-Жордан. Най-напред се преписва първото уравнение, а на мястото на второто се записва сборът на двете уравнения. При тази операция променливата x_1 е елиминирана от второто уравнение, а в първото уравнение коефициентът пред нея е $+1$

$$M : \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ \multicolumn{9}{l}{x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,} \end{array} \right.$$

т. е. пред променливата x_1 е първият стълб на единичната матрица от ред 2. Така системата е решена спрямо променливата x_1. След това системата се решава и спрямо другата базисна променлива x_2. За целта второто уравнение се разделя на 2 и се прибавя към първото уравнение. Така пред променливата x_2 се получава вторият стълб на единичната матрица. Окончателно

$$M : \left| \begin{array}{l} x_1 \quad\;\; - 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ \quad x_2 - \;\; x_3 + \;\; x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, \;\; j = 1, \ldots, 4. \end{array} \right. \tag{11}$$

Тъй като десните страни в полученото представяне са неотрицателни, намерен е връх (бдр) на допустимото множество, като на мястото на небазисните променливи x_3 и x_4 се слагат нули. Веднага се получава $x_1 = 9$ и $x_2 = 3$. Намерен е върхът $\mathbf{x}^1 = (9, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

От $\mathbf{x}^1$ излизат два ръба, съответстващи на небазисните променливи x_3 и x_4. Най-напред да разгледаме стълба пред x_3 в представянето (11). От него се получава векторът $\mathbf{d}_3^1 = (3, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ по следния начин:

- коефициентът -3 пред x_3 в първото уравнение се записва с обратен знак на мястото на x_1 (базисната променлива в първото уравнение);

- коефициентът -1 пред x_3 във второто уравнение се записва с обратен знак на мястото на x_2 (базисната променлива във второто уравнение);

- останалите две координати на $\mathbf{d}_3^1$ са тези на единичния вектор с размерност $n - m = 4 - 2 = 2$, в който единицата е точно пред небазисната променлива x_3, с чийто стълб работим.

Координатите на точките от ръба, излизащ от $\mathbf{x}^1$, се получават по формулата

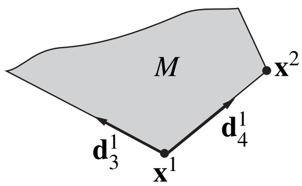
$$\mathbf{x}^1 + t\mathbf{d}_3^1 = \begin{bmatrix} 9 + 3t \\ 3 + \;\; t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

за всяко $t \geq 0$. Така ръбът, излизащ от $\mathbf{x}^1$ и съответстващ на небазисната променлива x_3, е неограничен.

Аналогично се намира векторът $\mathbf{d}_4^1 = (-3, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, а след това и представянето на съответния ръб

$$\mathbf{x}^1 + t\mathbf{d}_4^1 = \begin{bmatrix} 9-3t \\ 3-\ \ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

при $0 \leq t \leq 3$. Полученият ръб е ограничен. Геометрично той представлява отсечка. Единият край на отсечката (при $t = 0$) е върхът $\mathbf{x}^1$. При $t = 3$ се получава другият край на отсечката, който е съседен на $\mathbf{x}^1$ връх $\mathbf{x}^2 = (0, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$. Базисите на два съседни върха се различават само на едно място. Една от базисните променливи на $\mathbf{x}^1$ (в този случай или x_1, или x_2) е небазисна за $\mathbf{x}^2$, а една от небазисните променливи на $\mathbf{x}^1$ (x_4) е базисна за $\mathbf{x}^2$.



Фиг. 2. Задача 3, а)

б) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_1 и x_3, като се използва методът на Гаус-Жордан. Така се стига до

$$M : \left| \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\quad = \ \ 0 \\ \quad\ - \ x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 4. \end{array} \right.$$

В този случай базисното решение $(0, 0, -3, 0)^{\mathrm{T}} \ngeq \mathbf{0}$ не е допустимо и следователно не е връх на множеството M.

в) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_1 и x_4, като се използва методът на Гаус-Жордан

$$M : \left| \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 4. \end{array} \right.$$

След анулиране на небазисните променливи x_2 и x_3 се стига до бдр (връх) $\mathbf{x}^2 = (0, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$. Този връх е изроден, защото в случая x_1 е базисна нула.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_2, е

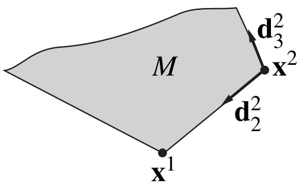
$$\mathbf{x}^2 + t\mathbf{d}_2^2 = \mathbf{x}^2 + t\begin{bmatrix}3\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3t\\t\\0\\3-t\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

за $0 \leq t \leq 3$. При $t = 3$ се попада в съседния връх $\mathbf{x}^1$.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_3, е

$$\mathbf{x}^2 + t\mathbf{d}_3^2 = \mathbf{x}^2 + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\t\\3+t\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

за всяко $t \geq 0$. Следователно този ръб е неограничен (за него $\mathbf{w}_3 = (0,-1)^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{0}$).



Фиг. 3. Задача 3, в)

г) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_2 и x_3, като се използва методът на Гаус-Жордан

$$M : \left|\begin{array}{lcl} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_3 - x_4 & = & -3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,4. & & \end{array}\right.$$

Базисното решение $(0,0,-3,0)^{\mathrm{T}}$ не е допустимо и следователно не е връх.

д) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_2 и x_4, като се използва метода на Гаус-Жордан

$$M : \left|\begin{array}{lcl} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 - x_3 + x_4 & = & 3 \\ x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,4. & & \end{array}\right.$$

Базисното решение $(0,0,0,3)^{\mathrm{T}}$ е допустимо и следователно е връх. Това е изроденият връх $\mathbf{x}^2$, получен в подточка в), но сега базисната му нула е x_2. Следователно $\mathbf{x}^2$ има два базиса — $[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_4]$ и $[\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_4]$. Посоките на ръбовете, излизащи от $\mathbf{x}^2$, в този случай са $\mathbf{d}_1^2 = \left(1,\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d}_3^2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$. Първата не е съществено различна от получената в подточка в) $\mathbf{d}_2^2$, защото $3\mathbf{d}_1^2 = \mathbf{d}_2^2$, а втората съвпада с вече определената в подточка в).

В този пример изроденият връх $\mathbf{x}^2$ няма фиктивни посоки.

Задачи

1. Да се приведат в каноничен вид следните задачи:

1.1.
$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_5 \to \min,\\
&-4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \le 8,\\
&x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge 1,\\
&x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 3;
\end{aligned}
$$

1.2.
$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \cdots + x_n \to \max,\\
&x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_2 + x_3 \le 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_{n-1} + x_n \le 1;
\end{aligned}
$$

1.3.
$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,\dots,m,\\
&0 \le x_j \le d_j, \quad j = 1,\dots,n;
\end{aligned}
$$

1.4.
$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,\\
&b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le d_i, \quad i = 1,\dots,m.
\end{aligned}
$$

2. Симетричната задача на ЛО

$$
\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1,\dots,m,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n\right\}
$$

се привежда в каноничен вид след въвеждане на допълнителните променливи $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Получава се каноничната задача

$$
\min\left\{-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,\dots,m,\right.
$$

$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, n+m \Big\}.$$

Нека $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$. Да се докаже, че ако $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)^{\mathrm{T}}$ е решение на каноничната задача, то $-\mathbf{x}^*$ е решение на изходната симетрична задача.

3. Общата задача на ЛО (1)–(4) се свежда към следната канонична задача

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} c_j(x'_j - \xi) \to \min,\\
&\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x'_j - \xi) + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, s,\\
&\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x'_j - \xi) \qquad\quad = b_i, \quad i = s+1, \dots, m,\\
&\xi \geq 0,\ \ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, p,\ \ x'_k \geq 0,\ \ k = p+1, \dots, n,\\
&\qquad\quad x_{n+i} \geq 0,\ \ i = 1, \dots, s.
\end{aligned}$$

Да се докаже, че ако $\widetilde{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{x}'_{p+1}, \dots, \bar{x}'_n, \bar{\xi}, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_{n+m})^{\mathrm{T}}$ е решение на каноничната задача, то $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{x}'_{p+1} - \bar{\xi}, \dots, \bar{x}'_n - \bar{\xi})^{\mathrm{T}}$ е решение на изходната задача (1)–(4).

4. Като се използва Теорема 1, да се провери кои от зададените вектори са върхове на съответните канонични множества и да се посочат изродените между тях.

4.1. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 2\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3\\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, 4, \end{aligned}\right.$ $\quad\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = \left(\frac{14}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0\right)^{\mathrm{T}}$;

4.2. $\left|\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, 4, \end{aligned}\right.$ $\quad\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$;

4.3. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1\\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 &\geq 0, \end{aligned}\right.$ $\quad\bar{\mathbf{x}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$;

4.4. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0\\ x_1 \geq 0,\ \ x_2 &\geq 0, \end{aligned}\right.$ $\quad\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$;

4.5. $\left|\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31 \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5, \end{array}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (4, 0, 17, 23, 9)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (3, 5, 0, 0, 17)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (0, 0, 9, 31, 21)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 8, 24, 19)^{\mathrm{T}}$;

4.6. $\left|\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 12 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5, \end{array}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, 12, 0, 12, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (5, 9, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (4, 0, 4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{u}} = (6, 18, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{v}} = (0, 0, 3, 9, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{w}} = (0, 0, 0, 0, 12)^{\mathrm{T}}$.

5. Да се намерят всички базиси на върховете на дадените множества и съответстващия им базисен вид на системата уравнения:

5.1. $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (\frac{1}{3}, 0)^{\mathrm{T}}$;

5.2. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$;

5.3. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, \end{array}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$;

5.4. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, \end{array}\right.$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$;

5.5. По условието на зад. 4.1;

5.6. По условието на зад. 4.2.

6. Да се намерят върховете, като се използват дадените им базиси:

6.1. $\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$ $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_2]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_1]$;

6.2. $\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 - 3x_6 = -2 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 6, \end{array}\right.$ $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_1, x_3]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_2, x_3]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{z}}} = [x_3, x_4]$;

6.3. $\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4, \end{array}\right.$ $\quad \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_2, x_3, x_4]$;

6.4. $\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ \quad - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 6, \end{array}\right.$ $\quad \mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_1, x_4, x_6]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_1, x_3, x_6]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{z}}} = [x_2, x_3, x_6]$.

7. Да се докаже, че $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = -\max\{-f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\}$ за произволна функция $f(\mathbf{x})$ и произволно множество Q.

8. Да се докаже, че ако $\widetilde{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+m})^{\mathrm{T}}$ с координати $\bar{x}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и $\bar{x}_j = 0$, $j = n+1, \dots, n+m$, е връх на множеството

$$\widetilde{M} : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, & i = 1, \dots, m, \\ \qquad\qquad x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n+m, \end{cases}$$

то $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ е връх на множеството

$$M : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, \dots, m, \\ \qquad x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Отговори и решения

4.1. $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ са неизродени върхове.

4.2. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх, $\bar{\mathbf{y}}$ е неизроден връх.

4.3. $\bar{\mathbf{x}}$ е неизроден връх.

4.4. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх.

4.5. $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ не са върхове; $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{z}}$ са неизродени върхове.

4.6. $\bar{\mathbf{y}}$ не е връх; $\bar{\mathbf{w}}$ е изроден връх; останалите са неизродени върхове.

5.1. $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_2]$: $\frac{3}{2}x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$; $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_1]$: $x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}$.

5.2. $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

5.3.

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcl} & & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & \frac{1}{2} \\ x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & = & \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

5.4. $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ и $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$: $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$.

5.5.

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} \frac{5}{7}x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ \frac{13}{14}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} & - & \frac{5}{13}x_2 & + & x_3 & - & \frac{10}{13}x_4 & = & \frac{3}{13} \\ x_1 & + & \frac{7}{13}x_2 & & & + & \frac{14}{13}x_4 & = & \frac{14}{13}. \end{array} \right.$$

5.6.

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1. \end{array} \right.$$

6.1. $\bar{\mathbf{x}} = (0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$.

6.2. $\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (0, 3, 8, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (0, 0, 2, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

6.3. $\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}\right)^{\mathrm{T}}$.

6.4. $\bar{\mathbf{x}} = (7, 0, 0, 12, 0, 10)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (10, 0, 3, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (0, 4, 5, 0, 0, 11)^{\mathrm{T}}$.

7. Ако $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\mathbf{x} \in Q$, тогава $-f(\mathbf{x}) \leq -f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\mathbf{x} \in Q$, т. е. $\max\{-f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = -f(\mathbf{x}^*)$; аналогично е и доказателството в обратната посока.

Упражнение 4

Базисно представяне на каноничната задача на линейното оптимиране. Идея на симплекс метода

1. Базисно представяне на каноничната задача на линейното оптимиране

Нека е дадена канонична задача (КЗ) на линейното оптимиране (ЛО)

$$
\text{(K)} \qquad \begin{aligned}
&\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m,\\
&x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

или в матричен вид $\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in M = \{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ е матрица $m \times n$ с ранг m, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$.

Нека $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ е връх на M с базис $\mathbf{B}$, а

$$
\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1}
$$

е базисното представяне на M относно базиса $\mathbf{B}$ на $\bar{\mathbf{x}}$. Сега базисните променливи се изключват от целевата функция. Най-напред от (1)

$$
\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N,
$$

а след това

$$
\begin{aligned}
z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N\\
&= \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N,
\end{aligned}
$$

където $\bar{c}_0 = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$.

Представянето на КЗ във вида

$$
\min z = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{2}
$$

се нарича *базисно представяне* на КЗ, съответстващо на базиса $\mathbf{B}$. Коефициентите

$$\overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_j, \qquad j \in N,$$

се наричат *относителни оценки* или *редуцирани цени* на небазисните променливи. Знакът на относителната оценка $\overline{c}_j$ дава възможност да се определи поведението на целевата функция по ръба, съответстващ на x_j:

- ако $\overline{c}_j > 0$, целевата функция z расте по ръба;
- ако $\overline{c}_j < 0$, целевата функция z намалява по ръба;
- ако $\overline{c}_j = 0$, целевата функция z не променя стойността си по ръба.

Теорема 1. Ако $M \neq \emptyset$, то минимумът на z върху M се достига поне в един връх или минимумът е $-\infty$.

Теорема 2 (Критерий за оптималност)**.** Върхът $\overline{\mathbf{x}}$ на M е оптимален, ако съществува базис на $\overline{\mathbf{x}}$, за който $\overline{c}_j \geq 0$, $j \in N$.

Теорема 3 (Критерий за неограниченост на целевата функция)**.** Ако съществува небазисна променлива x_q, за която $\overline{c}_q < 0$ и $\mathbf{w}_q = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \leq \mathbf{0}$, то $\min\limits_M z = -\infty$.

2. Идея за симплекс метода

Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е връх на M. С помощта на относителните оценки на небазисните променливи се определя поведението на z по ръбовете, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$.

1. Ако за всички небазисни j относителните оценки $\overline{c}_j \geq 0$, то $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимален връх (Теорема 2).

2. Ако съществува небазисна променлива x_q, за която $\overline{c}_q < 0$ и $\mathbf{w}_q \leq \mathbf{0}$, целевата функция z намалява неограничено върху M (Теорема 3).

3. Ако за всяка небазисна променлива x_j, за която $\overline{c}_j < 0$, съответният стълб $\mathbf{w}_j \nleq \mathbf{0}$, тогава съществува (ограничен) ръб, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$, по който целевата функция z намалява. Придвижвайки се по този ръб, се стига до съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'$, за който $z(\overline{\mathbf{x}}') \leq z(\overline{\mathbf{x}})$. Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е неизроден, неравенството е строго. При изроден връх е възможно да се получи фиктивен ръб и тогава придвижване по ръба е невъзможно, т. е. $\overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{x}}$. Тези случаи ще бъдат изяснени по-късно с примери. Тъй като върховете са краен брой и при неизродена задача (такава, чиито върхове са неизродени) стойността на целевата функция намалява монотонно при преминаване от един връх към съседен на него, след краен брой

стъпки се стига до оптимален връх или до заключение, че целевата функция е неограничена отдолу върху M.

Пример 1. Дадена е задачата

$$
\min_{M} z(\mathbf{x}) = -2x_1 + 3x_3 - 5x_4 + 3x_5,
$$

$$
(3) \qquad M: \left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 4 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5 \end{array} \right.
$$

и върховете $\overline{\mathbf{x}}' = (4,0,0,0,2)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{x}}'' = (0,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ на M. Да се приведе дадената задача в базисен вид спрямо базисите на $\overline{\mathbf{x}}'$ и $\overline{\mathbf{x}}''$ и да се провери дали тези върхове са оптимални. Да се изследва поведението на целевата функция върху ръбовете на допустимото множество, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}'$ и $\overline{\mathbf{x}}''$.

Решение. Лесно се проверява (как?), че $\overline{\mathbf{x}}'$ е неизроден, а $\overline{\mathbf{x}}''$ е изроден връх на M.

а) Базисът на $\overline{\mathbf{x}}'$ е $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5]$. Системата е решена спрямо x_5, защото x_5 присъства с коефициент $+1$ само в първото уравнение. За да се реши системата спрямо x_1, второто уравнение се изважда от първото. Така базисното представяне на ограниченията на задачата спрямо базиса на $\overline{\mathbf{x}}'$ е

$$
\begin{aligned}
x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2,\\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= 4,\\
x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5.&
\end{aligned}
$$

Оттук базисните променливи се изразяват чрез небазисните

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= 4 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4,\\
x_5 &= 2 - x_2 + 2x_3 - 3x_4.
\end{aligned}
$$

Изразите за x_1 и x_5 от (4) се заместват в целевата функция и така се стига до базисното представяне на задачата за неизродения връх $\overline{\mathbf{x}}'$

$$
\min z(\mathbf{x}) = x_2 + 3x_3 - 2,
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2,\\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= 4,\\
x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5.&
\end{aligned}
$$

Следователно относителните оценки на небазисните променливи са $\overline{c}_2 = 1$, $\overline{c}_3 = 3$, $\overline{c}_4 = 0$, $\overline{c}_0 = z(\overline{\mathbf{x}}') = -2$. Вижда се, че относителните оценки на небазисните променливи на $\overline{\mathbf{x}}'$ са неотрицателни, което означава, че $\overline{\mathbf{x}}'$ е оптимален връх. Минималната стойност на целевата функция е -2.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_2, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}' + t\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-2t\\t\\0\\0\\2-\ \ t\end{bmatrix}, \qquad t \in [0,2].$$

Този ръб е ограничен (отсечка) и за $t = 2$ се получава съседният връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Тъй като $\overline{c}_2 > 0$, $z(\overline{\mathbf{x}}'') > z(\overline{\mathbf{x}}')$ и следователно целевата функция расте по ръба от $\overline{\mathbf{x}}'$ до $\overline{\mathbf{x}}''$.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_3, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}' + t\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3t\\0\\t\\0\\2+2t\end{bmatrix}, \qquad t \in [0,\infty).$$

Този ръб е неограничен и тъй като $\overline{c}_3 > 0$, целевата функция расте неограничено върху него.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_4, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}' + t\begin{bmatrix}-7\\0\\0\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-7t\\0\\0\\t\\2-3t\end{bmatrix}, \qquad t \in [0,4/7].$$

Този ръб е ограничен (отсечка) и за $t = 4/7$ се получава съседният връх $\overline{\mathbf{x}}''' = (0,0,0,4/7,2/7)^{\mathrm{T}}$. Тъй като $\overline{c}_4 = 0$, $z(\overline{\mathbf{x}}''') = z(\overline{\mathbf{x}}')$ и следователно целевата функция е постоянна по ръба от $\overline{\mathbf{x}}'$ до $\overline{\mathbf{x}}'''$. Вече установихме, че $\overline{\mathbf{x}}'$ е оптимален връх. Следователно както за $\overline{\mathbf{x}}'''$, така и за всички точки от отсечката, която свързва $\overline{\mathbf{x}}'$ и $\overline{\mathbf{x}}'''$, е изпълнено

$$\min_M z = z(\overline{\mathbf{x}}') = z(\overline{\mathbf{x}}''') = z\Big(\alpha\overline{\mathbf{x}}' + (1-\alpha)\overline{\mathbf{x}}'''\Big) = -2, \qquad \alpha \in [0,1].$$

б) Изроденият връх $\overline{\mathbf{x}}''$ има четири базиса: $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$, $\mathbf{B}_3 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$, $\mathbf{B}_4 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5]$.

Базисното представяне на задачата спрямо базиса $\mathbf{B}_1$ е

$$\begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= 5x_3 - 3x_4 - x_5, \\ x_1 \qquad + \ x_3 + \ x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 + \ x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Следователно относителните оценки са $\overline{c}_3 = 5$, $\overline{c}_4 = -3$, $\overline{c}_5 = -1$, $\overline{c}_0 = 0 = z(\overline{\mathbf{x}}'') > z(\overline{\mathbf{x}}') = -2$ и следователно $\overline{\mathbf{x}}''$ не е оптимален.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_3, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}'' + t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2 + 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и е фиктивен, защото само за $t = 0$ се получава допустима точка (именно $\overline{\mathbf{x}}''$).

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_4, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}'' + t\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2 - 3t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

и също е фиктивен.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_5, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}'' + t\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2 - t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2].$$

Този ръб е ограничен (отсечка) и за $t = 2$ се получава съседният връх $\overline{\mathbf{x}}' = (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. Тъй като $\overline{c}_5 < 0$, $z(\overline{\mathbf{x}}'') > z(\overline{\mathbf{x}}')$ и следователно целевата функция намалява по ръба от $\overline{\mathbf{x}}''$ до $\overline{\mathbf{x}}'$. Този факт напълно съответства на полученото в подточка а).

От това базисно представяне се получи само един от действителните ръбове, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}''$. Останалите два действителни ръба се получават от базисните представяния спрямо другите базиси на $\overline{\mathbf{x}}''$.

Базисното представяне на задачата спрямо базиса $\mathbf{B}_2$ е

$$\min z(\mathbf{x}) = -5x_1 - 8x_4 + 9x_5,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 3x_5 & = & 2, \end{array}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5.$$

Следователно относителните оценки са $\overline{c}_1 = -5$, $\overline{c}_4 = -8$, $\overline{c}_5 = 9$.

Ръбовете, съответстващи на небазисните променливи x_1 и x_4, имат съответно представянията

$$\begin{bmatrix} t \\ 2-2t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2-5t \\ -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

И двата са фиктивни.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_5, е неограничен (защото $\mathbf{w}_5 < \mathbf{0}$): $\begin{bmatrix} 0 \\ 2+3t \\ 2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $t \in [0, \infty)$. Тъй като $\overline{c}_5 > 0$, стойностите на целевата функция растат неограничено по този ръб. Така се получава още един действителен ръб, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}''$.

Базисното представяне на задачата спрямо базиса $\mathbf{B}_3$ е

$$\min z(\mathbf{x}) = 3x_1 + 8x_3 - 7x_5,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 0, \\ -3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & & & + & 7x_5 & = & 2, \end{array}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5.$$

Следователно относителните оценки са $\bar{c}_1 = 3$, $\bar{c}_3 = 8$, $\bar{c}_5 = -7$.

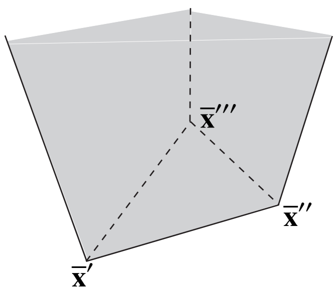
Лесно се проверява, че ръбовете, съответстващи на небазисните променливи x_1 и x_3, са фиктивни.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_5, е ограничен (отсечка)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2-7t \\ 0 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2/7]$$

Тъй като $\bar{c}_5 < 0$, целевата функция намалява по този ръб. За $t = 2/7$ се получава съседният връх $\bar{\mathbf{x}}''' = (0, 0, 0, 4/7, 2/7)^{\mathrm{T}}$.

Трите ръба, излизащи от изродения връх $\bar{\mathbf{x}}''$, са вече получени с помощта на базисите $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$. Затова другите му базиси не ни интересуват. Видът на многостенното канонично множество M е показан на фиг. 1.



Фиг. 1. Множеството M от Пример 1

Задачи

1. Да се приведе дадената задача в базисен вид спрямо базисите на $\bar{\mathbf{x}}'$ и да се провери дали този връх е оптимален. Да се изследва поведението на целевата функция върху ръбовете на допустимото множество, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}'$.

1.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max$,

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \qquad \bar{\mathbf{x}}' = (0, 0, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}; \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5, \end{aligned}$$

1.2. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6, \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3, \end{array} \qquad \overline{\mathbf{x}}' = (9, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}};$$

$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4,$

1.3. $z(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 3, \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & & & + & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 4, \end{array} \qquad \overline{\mathbf{x}}' = (0, 3, 0, 1, 4)^{\mathrm{T}};$$

$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5,$

1.4. $z(\mathbf{x}) = -5x_1 - 2x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4, \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 1, \end{array} \qquad \overline{\mathbf{x}}' = (0, 0, 4, 0, 1)^{\mathrm{T}};$$

$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5,$

1.5. Задача 1.4, но при $z(\mathbf{x}) = x_1 \to \min;$

1.6. Задача 1.4, но при $z(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max;$

1.7. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 6x_2 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 6, \\ -3x_1 & + & 7x_2 & & & + & x_4 & = & 61, \end{array} \qquad \overline{\mathbf{x}}' = (6, 0, 0, 79)^{\mathrm{T}}.$$

$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4,$

Отговори и решения

1.1. Съседни върхове: $\overline{\mathbf{x}}'' = (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{x}}''' = (0, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ — неоптимални.

1.2. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (9 + 3t, 3 + t, t, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$. Ограничен ръб $\mathbf{x}_u = (9 - 3u, 3 - u, 0, u)^{\mathrm{T}}$, $u \in [0, 3]$. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$. Стойностите на целевата функция намаляват при придвижване от $\overline{\mathbf{x}}'$ към $\overline{\mathbf{x}}''$.

1.3. Съседни върхове: $\overline{\mathbf{x}}'' = (1, 5, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{x}}''' = (0, 3, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}}' + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{x}}'''$, $\lambda \in [0, 1]$ и $z^* = 3$.

1.4. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Неограничен оптимален ръб $\mathbf{x}_t = (0, 0, 4, t, 1 + t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z^* = 2$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_u = (u, 0, 4 + 2u, 0, 1 + u)^{\mathrm{T}}$, $u \geq 0$, $z(\mathbf{x}_u) \xrightarrow[u \to +\infty]{} -\infty$.

1.5. Векторът $\overline{\mathbf{x}}'$ е оптимално решение. Съседно оптимално решение $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (t, 0, 4+2t, 0, 1+t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$. Неограничен оптимален ръб $\mathbf{x}_u = (0, 0, 4, u, 1 + u)$, $u \geq 0$. Общ вид на оптималните решения $\mathbf{x}_{\lambda u} = \lambda\overline{\mathbf{x}}' + (1-\lambda)\overline{\mathbf{x}}'' + u\mathbf{p}$, $\lambda \in [0, 1]$, $u \geq 0$, $\mathbf{p} = (0, 0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

1.6. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (t, 0, 4 + 2t, 0, 1 + t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

1.7. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 2, 0, 47)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}}' + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{x}}''$, $\lambda \in [0, 1]$ и $z^* = 12$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (6 + t, 0, t, 79 + 3t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Упражнение 5

Симплекс метод за решаване на КЗЛО при известен начален базис

Изучаването на симплекс метода започва при известен начален базис. Намирането на начално бдр (начален връх) при неизвестен начален базис ще бъде предмет на някое от следващите упражнения.

Алгоритъм на симплекс метода

(0) Нека е дадено базисно допустимо решение (връх) $\overline{\mathbf{x}}$ на КЗЛО

$$\text{(K)} \qquad \min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \qquad \operatorname{rank} \mathbf{A} = m,$$

съответстващо на базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{j_m}]$. Нека с $\mathcal{B}$ е означено множеството $\{j_1, \ldots, j_m\}$ от индексите на базисните променливи, т. е. x_{j_i} е i-та базисна променлива.

(1) Привеждаме задачата в **базисен вид спрямо базиса B**

$$\text{(1)} \qquad \min z = \overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N + \overline{c}_0, \qquad \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

където *относителните оценки* са пресметнати по формулите

$$\text{(2)} \qquad \overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_j, \qquad j \notin \mathcal{B}.$$

(2) **Проверка за оптималност.** Ако $\overline{c}_j \geq 0$ за всяко $j \notin \mathcal{B}$, КРАЙ; текущото бдр е оптимално.

(3) **Проверка за неограничен ръб, по който целевата функция намалява неограничено.** Ако съществува $j \notin \mathcal{B}$, за който $\overline{c}_j < 0$ и $\mathbf{w}_j \leq \mathbf{0}$, КРАЙ; има неограничен ръб в допустимото множество, по който $z \to -\infty$.

(4) **Определяне на небазисна променлива x_q за влизане в базиса.** Ако за всеки индекс $j \notin \mathcal{B}$, за който $\overline{c}_j < 0$, съответният стълб $\mathbf{w}_j \nleq \mathbf{0}$, то от $\overline{\mathbf{x}}$ излизат само ограничени ръбове на допустимото множество, по които стойността на целевата функция намалява. Избираме един такъв индекс $q \in \{j \notin \mathcal{B} : \overline{c}_j < 0\}$. Стълбът с номер q се нарича *ключов* (*водещ*) стълб. Ако има повече от един индекс, който е кандидат за ключов стълб, препоръчва се да се избира този, за който $|\overline{c}_q|$ е максимална (известно като правило на Бил).

(5) Определяне на базисна променлива x_{j_p} за излизане от базиса. Пресмята се числото

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}} = \min_{1\le i\le m}\left\{\frac{\bar{x}_{j_i}}{w_{iq}} : w_{iq} > 0\right\}. \tag{3}$$

Редът с номер j_p се нарича *ключов* (*водещ*) ред, а числото w_{pq} — *ключово число* (*водещ елемент*).

(6) Обновяване на текущото бдр и на базисната матрица $\mathbf{B}$.

- На мястото на досегашната базисна променлива x_{j_p} влиза x_q. Следователно $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{j_p\} \cup \{q\}$. На мястото на стълба $\mathbf{A}_{j_p}$ в досегашния базис влиза стълба $\mathbf{A}_q$. На практика това означава, че новото базисно представяне на задачата се получава от (1), като системата $\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ се реши по метода на Гаус-Жордан спрямо новата базисна променлива x_q. С други думи, в j_p-тото уравнение коефициентът пред x_q става равен на $+1$ след делене на това уравнение с ключовото число w_{pq}, след което x_q се изключва от останалите уравнения на системата и от целевата функция. Формулите за това така наречено *елементарно преобразование на системата* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *с ключово число* w_{pq} са следните

$$w'_{pj} = \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad w'_{ij} = w_{ij} - w_{iq}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad i \ne p,\ j = 1,\dots,n. \tag{4}$$

- Координатите на новия връх $\bar{\mathbf{x}}'$, който е съседен на $\bar{\mathbf{x}}$, са

$$\bar{x}'_q = \bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}}, \quad \bar{x}'_{j_i} = \bar{x}_{j_i} - \bar{t}w_{iq},\ i \ne p. \tag{5}$$

  и се получават при елементарното преобразование с ключово число w_{pq}.

- Стойността на целевата функция и относителните оценки на небазисните променливи при новия базис могат да бъдат пресметнати по следния начин

$$\bar{c}'_0 = \bar{c}_0 + \bar{c}_q\bar{t}, \qquad \bar{c}'_j = \bar{c}_j - \bar{c}_q\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad j \notin \mathcal{B}'. \tag{6}$$

Преминаваме на стъпка (1).

Забележка 1. Ако в (3) $\bar{t} = 0$ ($\bar{x}_{j_p} = 0$), то $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}$, т. е. описаната процедура сменя само базиса на изроденото бдр $\bar{\mathbf{x}}$.

Забележка 2. Ако минимумът в (3) се достига за няколко частни $\dfrac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}}$, то само една от съответните базисни променливи ще напусне базиса — останалите ще бъдат базисни нули за $\bar{\mathbf{x}}'$, т. е. $\bar{\mathbf{x}}'$ е изродено бдр.

Забележка 3. Ако след намирането на оптимално бдр се окаже, че има небазисна(и) променлива(и) с нулева относителна оценка, това означава, че задачата може да има и други оптимални базиси. Нека $\bar{c}_j = 0,\ j \notin \mathcal{B}$. Тук възникват два случая:

- ако стълбът $\mathbf{w}_j \le \mathbf{0}$, тогава съществува неограничен ръб на допустимото множество, чиито точки също са оптимални решения.
- ако стълбът $\mathbf{w}_j$ има поне един положителен елемент, тогава съществува съседен оптимален базис.

Пример 1. Дадена е каноничната задача

$$z(\mathbf{x}) = ax_1 - x_2 + ax_3 \to \min,$$

$$M : \left| \begin{array}{l} ax_1 - x_2 + (1-a)x_3 = a - 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ \qquad x_j \ge 0,\ j = 1,2,3, \end{array} \right.$$

и бдр $\bar{\mathbf{x}} = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$. За кои стойности на $a \ne 1$

а) $\bar{\mathbf{x}}$ е единствено оптимално бдр на задачата?

б) $\bar{\mathbf{x}}$ не е единствено оптимално бдр на задачата? Да се определи общият вид на оптималните решения.

в) целевата функция z намалява неограничено в M?

г) има съседно бдр на $\bar{\mathbf{x}}$, за което функцията има по-голяма стойност?

Решение. Векторът $\bar{\mathbf{x}}$ е бдр на задачата при $a \ne 1$, защото стълбовете от коефициентите пред положителните му координати x_1 и x_2 са линейно независими ($\det \|\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2\| = -a + 1 \ne 0$ за $a \ne 1$). Привеждаме задачата в базисен вид спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ на $\bar{\mathbf{x}}$ (като първо изключим x_2 от първото уравнение, а след това и x_1 от второто):

$$z(\mathbf{x}) = a - 1 + (2a - 1)x_3,$$

$$M : \left| \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,3. \end{array} \right.$$

а) $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално бдр, ако $\overline{c}_3 = 2a - 1 \geq 0$ и ще бъде единствено, ако $\overline{c}_3 = 2a - 1 > 0$, т. е. за $a > \frac{1}{2}$, $a \neq 1$.

б) $\overline{\mathbf{x}}$ не е единствено оптимално бдр, ако $\overline{c}_3 = 2a - 1 = 0$, т. е. $a = \frac{1}{2}$. Понеже $\mathbf{w}_3 = (-1, -1)^{\mathrm{T}} < \mathbf{0}$, от $\overline{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб на M, за чиито точки

$$\mathbf{x}_t = (1 + t, 1 + t, t)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

имаме $z(\mathbf{x}_t) = z(\overline{\mathbf{x}}) + 0.t = z(\overline{\mathbf{x}})$, т. е. те са оптимални решения на задачата.

в) Понеже $\mathbf{w}_3 < \mathbf{0}$, то трябва $\overline{c}_3 = 2a - 1 < 0$, т. е. $a < \frac{1}{2}$. Тогава за точките $\mathbf{x}_t$ на неограничения ръб (7) имаме

$$z(\mathbf{x}_t) = z(\overline{\mathbf{x}}) + (2a - 1)t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ за } a < \frac{1}{2}.$$

г) Не може да се премине към съседно бдр: $\overline{\mathbf{x}}$ е единственото бдр на M, защото $\mathbf{w}_3 < \mathbf{0}$ и при $x_3 = t \geq 0$ получаваме точките $\mathbf{x}_t \in M$ от (7).

Пример 2. Да се приложи алгоритъмът на симплекс метода за решаване на задачите:

а) $\min z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5$ при ограничения

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2, \end{array} \tag{8}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5.$$

б) $\max z = 3x_3 + 4x_4$ при ограничения

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\ -5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \tag{9}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4.$$

Решение. а) Системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ на ограниченията е в базисен вид с базис $[x_3, x_4, x_5]$, т. е. матрицата $\mathbf{A}$ съдържа в себе си единичната матрица от ред 3 (в случая това са стълбовете пред променливите x_3, x_4 и x_5). Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2, \\ x_4 &= 1 - x_1 + x_2, \\ x_5 &= 2 - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Заместваме базисните променливи в целевата функция и след приведение получаваме

$$z = -3 - 6x_1 + 7x_2. \tag{10}$$

Така относителните оценки на небазисните променливи са $\bar{c}_1 = -6 < 0$, $\bar{c}_2 = 7 > 0$ и $z(\mathbf{x}^{(1)}) = \bar{c}_0 = -3$. Критерият за оптималност не е изпълнен, тъй като относителната оценка на променливата x_1 е отрицателна. Стълбът $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ съдържа положително число и следователно целевата функция засега не личи да е неограничена. Преминаваме към съседно бдр чрез въвеждане на x_1 в базиса. Да видим коя от променливите с положителни коефициенти в стълба $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ще напусне базиса. Кандидати за напускане на базиса са x_4 и x_5, тъй като имат положителни коефициенти в стълба $\mathbf{w}_1$. Намираме числото

$$\bar{t} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 1.$$

Тогава променливата x_4 напуска базиса и нейното място се заема от x_1. Новият базис е $[x_3, x_1, x_5]$. Да получим базисното представяне на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. За целта решаваме системата (8) спрямо x_1, като най-напред разделяме втория ред на коефициента пред x_1. Този коефициент е 1 и затова нищо не се променя във второто уравнение. След това x_1 се елиминира от първото и третото уравнение, като второто уравнение се прибавя към първото, а след това второто уравнение се изважда от третото. Окончателно получаваме

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 \quad &= 2, \\ x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad &= 1, \\ 2x_2 \quad - x_4 + x_5 &= 1, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5&. \end{aligned}$$

Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 0, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме новата базисна променлива x_1 чрез небазисните

$$x_1 = 1 + x_2 - x_4.$$

Заместваме я в целевата функция (10) и след приведение получаваме

$$z = -9 + x_2 + 6x_4.$$

Относителните оценки на небазисните променливи са $\bar{c}_2 = 1 > 0$, $\bar{c}_4 = 6 > 0$ и $z(\mathbf{x}^{(2)}) = \bar{c}_0 = -9$. Критерият за оптималност е изпълнен. Следователно $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 0, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задачата и оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -9$.

б) Системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ на ограниченията е в базисен вид с базис $[x_3, x_4]$, т. е. матрицата $\mathbf{A}$ съдържа в себе си единичната матрица от ред 2 (в случая това са стълбовете пред променливите x_3 и x_4). Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - 2x_1 + 3x_2, \\ x_4 &= 1 + 5x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Понеже задачата е за максимум, привеждаме я към задачата за минимум, като умножаваме целевата функция с -1. След това заместваме базисните променливи в целевата функция и правим приведение. Получаваме

$$z = -7 - 14x_1 - x_2. \tag{11}$$

Относителните оценки $\bar{c}_1 = -14$ и $\bar{c}_2 = -1$ на небазисните променливи са отрицателни. Стълбовете $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ пред x_1 и $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ пред x_2 съдържат положително число и поне от този базис не личи целевата функция да е неограничена. Понеже абсолютната стойност на относителната оценка на x_1 е по-голяма от абсолютната стойност на относителната оценка на x_2, вкарваме в базиса x_1. Тъй като в стълба $\mathbf{w}_1$ само първата координата е положителна, а в първото уравнение базисна променлива е x_3, от базиса излиза x_3. Така новият базис е $[x_1, x_4]$. Решаваме системата (9) спрямо новата базисна променлива x_1. За целта делим първото уравнение на 2 и така полученото уравнение умножаваме с 5 и прибавяме към второто уравнение. Получаваме

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \qquad &= \tfrac{1}{2}, \\ - \tfrac{11}{2}x_2 + \tfrac{5}{2}x_3 + x_4 &= \tfrac{7}{2}, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 4.& \end{aligned} \tag{12}$$

Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме новата базисна променлива x_1 чрез небазисните

$$x_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3.$$

Заместваме в (11). След приведение получаваме

$$z = -14 - 22x_2 + 7x_3.$$

Относителните оценки на небазисните променливи са $\overline{c}_2 = -22 < 0$, $\overline{c}_3 = 7 > 0$ и $z(\mathbf{x}^{(2)}) = \overline{c}_0 = -14$. Критерият за оптималност не е изпълнен. Променливата x_2 трябва да влезе в базиса, но стълбът $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -11/2 \end{bmatrix}$ пред x_2 в представянето (12) не съдържа положително число. Следователно от $\mathbf{x}^{(2)}$ излиза неограничен ръб на допустимото множество, по който целевата функция намалява неограничено. Поради това задачата няма оптимално решение.

Задачи

1. Да се приложи алгоритъмът на симплекс метода да решаване на задачите:

1.1. $\max z = 3x_1 - x_2 + 2x_3$ при ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad &= -3, \\ x_1 \qquad - x_3 &\le 1, \\ x_1 \qquad + 4x_3 &\le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

1.2. $\min z = -3x_1 - x_2$ при ограничения

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le 4, \\ -x_1 + x_2 &\ge -2, \\ 3x_1 + x_2 &\le 22, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

1.3. $\min z = -x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4$ при ограничения

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

2. Решете чрез симплекс метода следващите задачи, като използувате даденото бдр $\mathbf{x}^{(0)}$. Намерете всички решения в зависимост от стойностите на параметъра a.

2.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + ax_3 \to \max, \qquad a \ne 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (a+2)x_3 &= a + 3, \\ x_1 - x_2 + (a-2)x_3 &= a - 3, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.2. $z(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max, \qquad a \neq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a + 2, \\ x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.3. $z(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max, \qquad 1 - 4ab \neq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} x_1 - (1+2a)x_2 + 2ax_3 &= 1 - 2a, \\ 2bx_1 - (1+2b)x_2 + x_3 &= 2b - 1, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + ax_3 \to \max, \qquad a \neq 1,\ \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} ax_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 &= 2a + 1, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.5. $z(\mathbf{x}) = ax_1 + x_2 + x_3 \to \max, \qquad a \neq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a + 2, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Отговори и решения

1.1. $z^* = \frac{1}{5}$, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

1.2. $z^* = -22$, $\mathbf{x}^* = (6, 4)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{18}{5}, \frac{56}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{\lambda} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$.

1.3. $z^* = -2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

2.1. $a > 0$: $z^* = a + 3$, $\mathbf{x}^* = (3, a, 0)^{\mathrm{T}}$; $a < 0$: $z^* = a + 1$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

2.2. $a > 0$: $z^* = 3a$, $\mathbf{x}^* = (a, 2, 0)^{\mathrm{T}}$; $a < 0$: $z^* = a$, $\mathbf{x}^* = (-a, 0, 2)^{\mathrm{T}}$.

2.3. $2a + 1 > 0$: $z(\mathbf{x})$ расте неограничено в допустимото множество; $2a + 1 < 0$: $z^* = a + 2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$; $2a + 1 = 0$: $z^* = a + 2$, $\mathbf{x}^t = (2 + t, 1 + t, t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$.

2.4. $a \leq 2$: $z^* = -1$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$; $a > 2$: $z^* = a - 3$, $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1)$.

2.5. $a > 0$: $z^* = a + 2$, $\mathbf{x}^* = (a, 2, 0)^{\mathrm{T}}$; $a < 0$: $z^* = 2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Упражнение 6

Таблична форма на симплекс метода

Симплекс методът се основава на свойствата на върховете на каноничната задача, разгледани в предишните две упражнения.

Нека $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_B, \bar{\mathbf{x}}_N)^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})^{\mathrm{T}}$ е връх на каноничната задача

$$\text{(K)} \qquad \min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Ако $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ и съответно $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)^{\mathrm{T}}$, съответстващият на $\bar{\mathbf{x}}$ базисен вид на задачата (K) при базисна матрица $\mathbf{B}$ е

$$(1) \qquad z(\mathbf{x}) = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N\mathbf{x}_N, \qquad \mathbf{x}_B + \mathbf{W}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0},$$

където

$$(2) \qquad \mathbf{W} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}, \qquad \bar{c}_0 = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{W}.$$

Числената схема на алгоритъма се реализира с помощта на *симплексни таблици* от вида на табл. 1. Симплексната таблица на даден връх $\bar{\mathbf{x}}$ съдържа съответния базисен вид (1) на задачата и координатите на $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ в първоначалния ѝ вид (K). В стълбовете $\mathcal{B}$, $\mathbf{c}_B$ и $\bar{\mathbf{x}}_B$ са нанесени съответно базисните променливи x_{j_i} (i-тото уравнение на $\mathbf{x}_B + \mathbf{W}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ е решено спрямо x_{j_i}), техните коефициенти c_{j_i} и стойности $\bar{x}_{B_i}$, $i = 1, \ldots, m$.

Таблица 1

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_q	$\ldots$	x_n	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		c_1	$\ldots$	c_j	$\ldots$	c_q	$\ldots$	c_n	0
x_{j_1}	c_{j_1}	w_{11}	$\ldots$	w_{1j}	$\ldots$	w_{1q}	$\ldots$	w_{1n}	$\bar{x}_{j_1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{j_i}	c_{j_i}	w_{i1}	$\ldots$	w_{ij}	$\ldots$	w_{iq}	$\ldots$	w_{in}	$\bar{x}_{j_i}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{j_p}	c_{j_p}	w_{p1}	$\ldots$	w_{pj}	$\ldots$	$\boxed{w_{pq}}$	$\ldots$	w_{pn}	$\bar{x}_{j_p}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_{j_m}	c_{j_m}	w_{m1}	$\ldots$	w_{mj}	$\ldots$	w_{mq}	$\ldots$	w_{mn}	$\bar{x}_{j_m}$
$\bar{\mathbf{c}}$		$\bar{c}_1$	$\ldots$	$\bar{c}_j$	$\ldots$	$\bar{c}_q$	$\ldots$	$\bar{c}_n$	$-\bar{c}_0$

Стълбовете на x_j съдържат коефициентите пред едноименните променливи в (1). За небазисните променливи x_j това са елементите на съответния стълб на $\mathbf{W}$, а за базисните — координатите на съответния единичен вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$, в който $w_{ij_i} = 1$. В примерите по-долу единичните стълбове са попълнени за прегледност. В последния (индексния) ред на таблицата са нанесени относителните оценки: това са координатите $\bar{c}_j$ на $\bar{\mathbf{c}}_N$, а за базисните променливи $\bar{c}_{j_i} = 0$, $i = 1, \dots, m$. Там, където индексният ред пресича стълба $\bar{\mathbf{x}}_B$, се вписва $-\bar{c}_0$.

Една реализация на симплекс метода е следната:

1. **Проверка за оптималност на върха.** Ако $\bar{\mathbf{c}}_N \geq 0$, върхът е оптимален и задачата е решена. В противен случай се изпълнява следващата точка.

2. **Проверка за неограниченост (отдолу) на целевата функция.** Ако съществува относителна оценка $\bar{c}_j < 0$ и $\mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_{1j}, \dots, \mathbf{w}_{mj})^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{0}$, където $\mathbf{w}_j$ е стълбът на $\mathbf{W}$ от коефициентите пред небазисната променлива x_j, то функцията е неограничена отдолу в допустимото множество и задачата е решена. В противен случай се изпълнява следващата точка.

3. **Преход към съседен връх, при което стойността на целевата функция намалява или се запазва.** Извършва се на три етапа:

   а) *Избор на нова базисна променлива*. Избира се x_q с отрицателна относителна оценка $\bar{c}_q < 0$. Стълбът x_q в таблицата се нарича *ключов стълб*. Препоръчва се да се избира променлива с максимална по абсолютна стойност отрицателна оценка (правило на Бил).

   б) *Определяне на променливата, която излиза от базиса*. Пресмята се числото $\bar{t}$ по формулата

   $$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_{iq}} : w_{iq} > 0 \right\}. \tag{3}$$

   От базиса излиза x_{j_p}. Редът с номер p се нарича *ключов ред*. *Ключовото число* w_{pq} е заградено с правоъгълна рамка.

   в) Извършва се *елементарно преобразование с ключово число* w_{pq}, т. е. попълва се симплексна таблица за новия връх $\bar{\mathbf{x}}'$, съседен на $\bar{\mathbf{x}}$:

- в стълбовете $\mathcal{B}$ и $\mathbf{c}_B$ се прави само една смяна: вместо x_{j_p} се вписва новата базисна променлива x_q, а вместо c_{j_p} — числото c_q;
- останалата част от таблицата се попълва с числата w'_{ij}, $\overline{\mathbf{x}}'_i$, $\overline{c}'_j$, $\overline{c}'_0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, пресметнати по формулите

$$w'_{pj} = \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad w'_{ij} = w_{ij} - w_{iq}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad i \neq p, \tag{4}$$

$$\overline{x}'_q = \frac{\overline{x}_{j_p}}{w_{pq}}, \quad \overline{x}'_{j_i} = \overline{x}_{j_i} - \frac{\overline{x}_{j_p}}{w_{pq}}w_{iq}, \quad i \neq p, \tag{5}$$

$$-\overline{c}'_0 = -\overline{c}_0 - \overline{c}_q\overline{t}, \qquad \overline{c}'_j = \overline{c}_j - \overline{c}_q\frac{w_{pj}}{w_{pq}}. \tag{6}$$

С изключение на елементите от p-тия ред, където всички числа се делят на ключовото число w_{pq}, всеки елемент на новата таблица се получава по *правилото на правоъгълника*: от съответния елемент в старата таблица w_{ij} се изважда произведението на елемента от същия ред в ключовия стълб w_{iq} с елемента от същия стълб в ключовия ред w_{pj}, разделено на ключовото число w_{pq} (вж. табл. 1). След попълването на новата симплексна таблица се преминава към стъпка 1.

При тази процедура, ако задачата е неизродена, на всяка стъпка се преминава към нов връх, в който стойността на целевата функция е по-малка. След краен брой стъпки се стига до оптимален връх или се установява неограниченост (отдолу) на функцията в допустимото множество.

При изродени задачи обаче теоретично е възможно зацикляне: минаване през различни базиси на един и същ връх. На практика вероятността за зацикляне е минимална, но се е случвала в практически задачи, решавани с компютър. Затова са разработени процедури за избягване на зациклянето. Една проста такава е разработена от Бленд.

Забележка 1. При ръчно решаване на задачата може да се контролират сметките, ако след попълването на новата таблица относителните оценки се пресмятат и по формули (2).

Забележка 2. Ако минимумът в (3) се достига на повече от едно място, новият връх ще бъде изроден: ще се анулират и други базисни променливи (освен x_{j_p}) и те ще бъдат базисни нули за него.

Забележка 3. Ако в (3) се получи $\overline{t} = 0$, т. е. $\overline{\mathbf{x}}$ е изроден и $\overline{x}_{j_p} = 0$ е негова базисна нула, то елементарното преобразование (4)–(6) не води до нов връх, а само до смяна на базиса на $\overline{\mathbf{x}}$. Сред базисите на един изроден връх обаче винаги има базис, от който чрез елементарно преобразование може да се премине към нов връх.

Пример 1. Да се реши задачата

$$
\begin{aligned}
&z(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,\\
&2x_1 - x_2 = -3,\\
(7)\quad &x_1 - x_3 \le 1,\\
&x_1 + 4x_3 \le 4,\\
&x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид

$$
(8)\quad z_K(\mathbf{x}_K) = -3x_1 + x_2^+ - x_2^- - 2x_3 \to \min,
$$

$$
\begin{aligned}
&-2x_1 + x_2^+ - x_2^- = 3,\\
(9)\quad &x_1 - x_3 + x_4 = 1,\\
&x_1 + 4x_3 + x_5 = 4,\\
&x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Положили сме $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_2^+ \ge 0$, $x_2^- \ge 0$. Системата уравнения (9) е решена спрямо променливите x_2^+, x_4, x_5 и десните ѝ страни са неотрицателни, следователно $\mathbf{x}_K^{(0)} = (0, 3, 0, 0, 1, 4)^T$ е връх на каноничната задача с базис $\mathbf{B}_{\mathbf{x}_K^{(0)}} = [x_2^+, x_4, x_5]$.

Върхът $\mathbf{x}_K^{(0)}$ (табл. 2) не е оптимален: $\bar{c}_1 = -1 < 0$, $\bar{c}_3 = -2 < 0$. Не се проявява неограниченост на целевата функция — в стълбовете на x_1 и x_3 има положителни коефициенти. За нова базисна променлива е избрана x_3. Тя влиза в базиса на мястото на x_5 (само $w_{33} = 4 > 0$). След елементарно преобразование с ключово число $w_{33} = 4$, получаваме табл. 3. Новият връх е $\mathbf{x}_K^{(1)} = (0, 3, 0, 1, 2, 0)^T$ и $z_K(\mathbf{x}_K^{(1)}) = 1$. Той също не е оптимален: $\bar{c}_1 = -\frac{1}{2} < 0$.

Таблица 2

$\mathbf{x}^{(0)}$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	1	0	0	-1	1	0	1
x_5	0	1	0	0	$\boxed{4}$	0	1	4
$\bar{\mathbf{c}}$		-1	0	0	-2	0	0	-3

Таблица 3

$\mathbf{x}^{(1)}$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	$\boxed{5/4}$	0	0	0	1	$1/4$	2
x_3	-2	$1/4$	0	0	1	0	$1/4$	1
$\overline{\mathbf{c}}$		$-1/2$	0	0	0	0	$1/2$	-1

Сега в базиса влиза x_1 на мястото на x_4, защото

$$\bar{t} = \min\left[\frac{2}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{1}{4}}\right] = \min\left(\tfrac{8}{5}, 4\right) = \tfrac{8}{5}.$$

След елементарно преобразование с ключово число $w_{21} = \frac{5}{4}$ получаваме (табл. 4) върха $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)} = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, който е оптимален и $z_{\mathrm{K}}^* = z_{\mathrm{K}}(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)}) = \frac{1}{5}$.

Таблица 4

$\mathbf{x}^{(2)}$

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	0	1	-1	0	$8/5$	$2/5$	$31/5$
x_1	-3	1	0	0	0	$4/5$	$1/5$	$8/5$
x_3	-2	0	0	0	1	$-1/5$	$1/5$	$3/5$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	$2/5$	$3/5$	$-1/5$

Понеже $\overline{c}_2{}^- = 0$ и останалите елементи от стълба x_2^- са неположителни ($\mathbf{w}_2^- = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{0}$), то от върха $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)}$ излиза неограничен ръб на допустимото множество (9), чиито точки са от вида

$$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(t)} = \mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)} + t(0, 1, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5} + t, t, \frac{3}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \qquad t \geq 0$$

и също са оптимални решения на каноничната задача. Решенията на първоначалната задача се получават от първите четири координати на $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(t)}$

$(x_2 = x_2^+ - x_2^-)$: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$ и $z^* = -\frac{1}{5}$. Виждаме, че решението на дадената задача е единствено, въпреки че съответната канонична задача има оптимален неограничен ръб. Затова в бъдеще няма да обръщаме внимание на тези оптимални решения на каноничната задача, защото те не водят до нови оптимални решения на дадената задача.

Пример 2. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le 4, \\ -x_1 + x_2 &\ge -2, \\ 3x_1 + x_2 &\le 22, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид, като предварително умножим второто ограничение с -1

$$z_{\mathrm{K}}(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}) = -3x_1 - x_2 \to \min,$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 22, \\ x_j \ge 0,\ \mathrm{j} = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Задачата е в базисен вид (с базис само от допълнителни променливи) спрямо върха $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)} = (0, 0, 4, 2, 22)^{\mathrm{T}}$ и $z(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)}) = 0$. В таблица 5 са последователните симплексни таблици за $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)}$, $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(1)} = (2, 0, 8, 0, 16)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)} = \mathbf{x}_{\mathrm{K}}^* = (6, 4, 12, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z_{\mathrm{K}}(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(1)}) = -6$, $z_{\mathrm{K}}^* = z(\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^*) = -22$.

Оптималното решение $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^*$ не е единствено, понеже $\overline{c}_4 = 0$. При въвеждане на x_4 в базиса се получава (вж. последната симплексна таблица в табл. 5) оптималното решение $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{**} = \left(\frac{18}{5}, \frac{56}{5}, 0, \frac{48}{5}, 0\right)^{\mathrm{T}}$. Други оптимални върхове няма. Тогава всички оптимални решения на каноничната задача са $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(\lambda)} = \lambda \mathbf{x}_{\mathrm{K}}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{**} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}, 12\lambda, \frac{48-48\lambda}{5}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$. Изходната задача има оптимални решения $\mathbf{x}^{(\lambda)} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, и $z^* = -22$.

Пример 3. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

Таблица 5

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-3	-1	0	0	0	0	
x_3	0	-2	1	1	0	0	4	
x_4	0	$\boxed{1}$	-1	0	1	0	2	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(0)}$
x_5	0	3	1	0	0	1	22	
$\overline{\mathbf{c}}$		-3	-1	0	0	0	0	
x_3	0	0	-1	1	2	0	8	
x_1	-3	1	-1	0	1	0	2	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(1)}$
x_5	0	0	$\boxed{4}$	0	-3	1	16	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	-4	0	3	0	6	
x_3	0	0	0	1	$\boxed{5/4}$	$1/4$	12	
x_1	-3	1	0	0	$1/4$	$1/4$	6	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{(2)} = \mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{*}$
x_2	-1	0	1	0	$-3/4$	$1/4$	4	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	22	
x_4	0	0	0	$4/5$	1	$1/5$	$48/5$	
x_1	-3	1	0	$-1/5$	0	$1/5$	$18/5$	$\mathbf{x}_{\mathrm{K}}^{**}$
x_2	-1	0	1	$3/5$	0	$2/5$	$56/5$	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	22	

Решение. Дадената задача е в каноничен вид с очевиден начален базис $[x_1, x_2]$, на който отговаря изроден връх $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Симплексните

Таблица 6

$\mathcal{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-1	-1	-5	4	0	
x_1	-1	1	0	3	1	2	
x_2	-1	0	1	$\boxed{1}$	-2	0	$\mathbf{x}^{(0)}$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	-1	3	2	
x_1	-1	1	-3	0	7	2	
x_3	-5	0	1	1	-2	0	$\mathbf{x}^{(0)}$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	0	1	2	

таблици за решаване на задачата са дадени в таблица 6. Те съдържат базисния вид на задачата спрямо два базиса на този изроден връх. Критерият за оптималност се проявява само при втория базис. Оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -2$.

Задачи

Да се решат чрез симплекс метода дадените задачи. От симплексната таблица на последния връх $\bar{\mathbf{x}}$ да се определи:

а) ако $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимален, дали е единствено оптимално решение и ако не е, да се намерят всички съседни оптимални върхове, а също и оптималните решения (ако има такива), които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$; да се напише общият вид на допустимите вектори, за които от получената информация следва, че са оптимални решения на задачата;

б) общият вид на точките, лежащи върху неограничените ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, по които $z(\mathbf{x})$ расте или намалява неограничено (в зависимост от критерия).

1. $z(\mathbf{x}) = 3 - x_4 - x_5 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + \ x_4 + \ \ x_5 &= 2, \\ x_2 \quad + 2x_4 + 3x_5 &= 7, \\ x_3 - \ \ x_4 - 3x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

2. $z(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - x_6 \to \max,$

$$\begin{aligned} - x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 \qquad &= 5, \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 + \ x_5 - x_6 &= 3, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

3. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - \ x_4 - 5x_5 &= 7, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

4. Зад. 3, но при целева функция $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5$.

5. $z(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -2, \\ x_2 - x_3 &\geq 1, \\ 3x_2 + x_3 &\leq 5, \end{aligned}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4.$

6. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_3 + 3x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_4 &= 2, \\ 16x_2 + x_3 - 2x_4 &= 8, \\ 5x_2 &\leq 3, \end{aligned}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4.$

7. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4, \end{aligned}$$

$0 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 3,$

$0 \leq x_3 \leq 7,\ 0 \leq x_4.$

8. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4, \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 6, \end{aligned}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$

9. $z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 54, \\ 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 63, \end{aligned}$$

$0 \leq x_2 \leq 5,\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$

Отговори и решения

1. $z^* = 1$. При влизане на x_4 в базиса оптимално решение е $\mathbf{x}^* = (0, 3, 4, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. При влизане на x_5 в базиса оптимално решение е $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 8, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (0, 2\lambda+1, 8-4\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$.

2. От $\overline{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ излиза неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (3+t, 0, 5, 0, 0, t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$; $z(\mathbf{x}_t) = 50 + 4t \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$.

3. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение, $z^* = 16$. Оптимални неограничени ръбове ($\overline{c}_4 = 0$) $\mathbf{x}_t = (7+t, 0, 2+3t, t, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{p} = (1, 0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ и ($\overline{c}_5 = 0$) $\mathbf{x}_r = (7+5r, 0, 2+2r, 0, r)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{q} = (5, 0, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}_\mu = \overline{\mathbf{x}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (7+\mu_1+5\mu_2, 0, 2+3\mu_1+2\mu_2, \mu_1, \mu_2)^{\mathrm{T}}$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$.

4. $\overline{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение, $z^* = 16$. Неограничени ръбове ($\overline{c}_4 = 0$) $\mathbf{x}_t$ и ($\overline{c}_5 = 0$) $\mathbf{x}_r$ от вида в задача 3. $\overline{\mathbf{x}}$ има съседен оптимален връх ($\overline{c}_2 = 0$) $\overline{\mathbf{y}} = (3, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения са $\mathbf{x}_{\lambda\mu} = \lambda\overline{\mathbf{x}} + (1-\lambda)\overline{\mathbf{y}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (3+4\lambda+\mu_1+5\mu_2, 2-2\lambda, 2\lambda+3\mu_1+2\mu_2, \mu_1, \mu_2)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ (това не са всички решения — от $\overline{\mathbf{y}}$ също излиза неограничен оптимален ръб).

5. $z^* = \frac{5}{3}$, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{17}{6}, \frac{5}{3}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

6. $z^* = 0$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

7. $z^* = 6$, $\mathbf{x}^* = (3, 3, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

8. $z^* = 3$, $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

9. $z^* = 108$, $\mathbf{x}^* = (2, 5, 4)^{\mathrm{T}}$.

Упражнение 7, 8

Решаване на каноничната задача на линейното оптимиране при неизвестен начален базис

Има два общоприети метода за намиране на начално бдр на КЗЛО. Първият от тях е известен като *двуетапен симплекс метод*. На *първия етап* се решава специална КЗЛО, която има очевидно бдр. Тази задача винаги е разрешима. От вида на оптималното решение се съди за това дали е получено бдр на КЗЛО или допустимото множество на тази задача е празно (ограниченията на задачата са несъвместими). В първия случай се продължава с *втория етап*, който се състои в решаване на задачата със симплекс метода, като се започне с вече намереното оптимално бдр на първия етап.

Вторият начин обединява двата етапа на двуетапния симплекс метод в едно и е известен като *M-метод* или *M-задача*. Ние ще се спрем само на този метод.

Нека е дадена КЗЛО

$$
\text{(K)}\qquad
\begin{aligned}
z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\to \min,\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, &\quad i = 1, \dots, m,\\
x_j \ge 0, &\quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

M-задача, съответна на задача (K), наричаме задачата

$$
\text{(M)}\qquad
\begin{aligned}
z_M(\mathbf{x}_M) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} &\to \min,\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, &\quad i = 1, \dots, m,\\
x_j \ge 0, &\quad j = 1, \dots, n+m,
\end{aligned}
$$

където $M > 0$ е достатъчно голямо число.

Теорема 1. Ако $\mathbf{x}_M^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задачата (M) и $x_{n+i}^* = 0$, $i = 1, \dots, m$, то $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задачата (K).

Теорема 2. Ако каноничната задача (K) има оптимално решение, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geq M_0$ съответната M-задача е разрешима и последните m (изкуствените) координати на всички нейни оптимални бдр са нули ($x^*_{n+i} = 0,\ i = 1, \dots, m$).

Тези теореми позволяват каноничната задача (K) да се решава чрез M-задачата (M). Задача (M) има бдр $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ с базис $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_M^{(0)}} = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$, базисна матрица $\mathbf{B} = \mathbf{E}_m$ и системата ѝ уравнения е в базисен вид спрямо $\mathbf{x}_M^{(0)}$. Променливите x_{n+i}, $i = 1, \dots, m$, се наричат *изкуствени променливи*, а $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_M^{(0)}}$ — *изкуствен базис*.

След като симплекс метода се приложи към M-задачата, се стига до един от следните случаи:

1. Намерено е оптимално бдр $\mathbf{x}^*_M = (x^*_1, \dots, x^*_n, x^*_{n+1}, \dots, x^*_{n+m})^{\mathrm{T}}$ на M-задачата:

   (а) ако $x^*_{n+i} = 0$, $i = 1, \dots, m$, то $\mathbf{x}^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на каноничната задача (K) и $z(\mathbf{x}^*) = z_M(\mathbf{x}^*_M)$;

   (б) ако $\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} > 0$, от Теорема 2 следва, че допустимото множество на каноничната задача (K) е празно, т. е. тя няма решение.

2. M-задачата няма решение (функцията $z_M(\mathbf{x}_M) \to -\infty$ в допустимото ѝ множество). От Теорема 2 следва, че и каноничната задача (K) няма решение (поради това, че допустимото ѝ множество е празно или $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него).

При решаване на M-задачата не е необходимо да се определя числото M. Достатъчно е да се има предвид, че M е достатъчно голямо. За целта относителните оценки $\overline{c}_j$, $j = 1, \dots, n+m$, на дадено бдр се разглеждат като сума $\overline{c}_j = \overline{c}_{1j} + \overline{c}_{2j}M$ и тогава

$$\operatorname{sign} \overline{c}_j = \operatorname{sign} \overline{c}_{2j} \quad \text{при} \quad \overline{c}_{2j} \neq 0,\ j = 1, \dots, n+m.$$

За нагледност може симплексната таблица да се допълни с още един ред: числата $\overline{c}_{1j}$, $j = 0, \dots, n+m$, се попълват в $(m+1)$-вия ред, а $\overline{c}_{2j}$, $j = 0, \dots, n+m$ — в $(m+2)$-рия ред на таблицата ($\overline{c}_0 = \overline{c}_{10} + \overline{c}_{20}M$). Когато прилагаме критерия за оптималност или определяме ключовия стълб, се ръководим от числата $\overline{c}_{2j}$, $j = 1, \dots, n+m$, докато между тях има различни от нула. При елементарно преобразование с ключов елемент w_{pq} формулите за $\overline{c}_{1j}$ и $\overline{c}_{2j}$

имат вида

$$(1)\qquad \begin{aligned} -\bar{c}'_{10} &= -\bar{c}_{10} - \bar{c}_{1q}\frac{\bar{\mathbf{x}}_{B_p}}{w_{pq}}, \quad -\bar{c}'_{20} = -\bar{c}_{20} - \bar{c}_{2q}\frac{\bar{\mathbf{x}}_{B_p}}{w_{pq}};\\ \bar{c}'_{1j} &= \ \ \bar{c}_{1j} - \bar{c}_{1q}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \qquad \bar{c}'_{2j} = \ \bar{c}_{2j} - \bar{c}_{2q}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n+m. \end{aligned}$$

Възможните случаи 1) и 2), до които се стига след решаването на M-задачата, имат следната интерпретация в таблицата:

1. $\bar{c}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n+m$, т. е. $\bar{c}_{2j} \geq 0$ за $j = 1, \dots, n+m$ и $\bar{c}_{1j} \geq 0$ за тези j, за които $\bar{c}_{2j} = 0$. В този случай е намерено оптимално бдр $\mathbf{x}^*_M = (x^*_1, \dots, x^*_n, x^*_{n+1}, \dots, x^*_{n+m})^{\mathrm{T}}$ на M-задачата:

   (а) ако $\bar{c}_{20} = 0$, то $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} = 0$ и $\mathbf{x}^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на каноничната задача;

   (б) ако $\bar{c}_{20} \neq 0$, то $\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} > 0$ и каноничната задача няма решение, защото допустимото ѝ множество е празно.

2. Съществува $\bar{c}_q < 0$ ($\bar{c}_{2q} < 0$ или $\bar{c}_{2q} = 0$, $\bar{c}_{1q} < 0$), а $w_{iq} \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Тогава M-задачата няма решение, откъдето следва, че и каноничната задача няма решение.

Забележка 1. Не е необходимо началният базис на M-задачата да бъде изцяло изкуствен. Ако в каноничната задача системата от уравнения е решена спрямо някои от променливите $x_1, \dots, x_n$, целесъобразно е те да се използват като базисни (вж. примерите).

Забележка 2. След излизането на някоя изкуствена променлива x_{n+i} ($1 \leq i \leq m$) от базиса, попълването на стълба x_{n+i} става излишно и той може да отпадне от таблицата, тъй като тази променлива не може да се върне в базиса, защото това би довело до увеличаване на стойността на целевата функция.

Забележка 3. Ако за дадено бдр $\mathbf{x}_M = (x_1, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$ на M-задачата някоя изкуствена променлива x_{n+p} ($1 \leq p \leq m$) е базисна нула ($x_{n+p} = 0$), тя може да бъде изключена от базиса, като се направи елементарно преобразование с ключов елемент $w_{pq} \neq 0$, където p е редът на x_{n+p} в таблицата (ключовият ред), а q е индекс на небазисна променлива (вж. пример 2).

Забележка 4. Ако в симплексната таблица на някое бдр $\mathbf{x}_M$ се окаже, че $\bar{c}_{20} = 0$, то $\mathbf{x}_M = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$, което означава, че или всички изкуствени променливи x_{n+i} са небазисни, или базисните сред тях са базисни нули. В първия случай $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ е бдр на каноничната задача (K). Във втория случай, след като се изключат от базиса изкуствените променливи, които са базисни нули, ще се получи симплексна таблица, която може да се разглежда като начална за каноничната задача (K) при начално бдр $\overline{\mathbf{x}}$ (в нея липсват стълбовете на изкуствените променливи и $(m+2)$-ият ред). След като при решаването на M-задачата се стигне до такава таблица, оттук нататък се решава направо каноничната задача (K).

Пример 1. Да се реши задачата

$$
\begin{aligned}
& z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \min, \\
& \begin{array}{rcccccl}
-2x_1 & - & x_2 & & + x_4 & & = 3, \\
x_1 & & & - x_3 & & & = 1, \\
3x_1 & & & + x_3 & & + x_5 & = 4,
\end{array} \\
& x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 5.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Решение. Системата уравнения е решена спрямо променливите x_4 и x_5. В M-задачата ще има само една изкуствена променлива x_6:

$$
\begin{aligned}
& z_M(\mathbf{x}_M) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + Mx_6 \to \min, \\
& \begin{array}{rccccccl}
-2x_1 & - & x_2 & & + x_4 & & & = 3, \\
x_1 & & & - x_3 & & & + x_6 & = 1, \\
3x_1 & & & + x_3 & & + x_5 & & = 4,
\end{array} \\
& x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 6.
\end{aligned}
$$

Началното бдр е $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0, 0, 0, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_M^{(0)}} = [x_4, x_6, x_5]$. Съответната му симплексна таблица е показана в табл. 1. Бдр $\mathbf{x}_M^{(0)}$ не е оптимално: $\bar{c}_1 =$

Таблица 1

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	3	-3	0	0	M	0
x_4	0	-2	-1	0	1	0	0	3
x_6	M	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	3	0	1	0	1	0	4
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M+2$	3	$M-3$	0	0	0	$-M$

Таблица 2

$\mathbf{x}_M^{(1)}$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	3	−3	0	0	0
x_4	0	0	−1	−2	1	0	5
x_1	2	1	0	−1	0	0	1
x_5	0	0	0	$\boxed{4}$	0	1	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	3	−1	0	0	−2

$-M + 2 < 0$. Новата базисна променлива x_1 влиза на мястото на изкуствената променлива x_6, защото $\min\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right) = 1$. Новото бдр (табл. 2) е $\mathbf{x}_M^{(1)} = (1, 0, 0, 5, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ и $z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = 2$. Понеже $\bar{c}_3 = -1 < 0$, x_3 влиза в базиса на мястото на x_5. Новото бдр (табл. 3) $\mathbf{x}_M^{(2)} = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{11}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$ е оптимално и $z_M^* = \frac{7}{4}$. Изкуствената променлива x_6 има стойност нула, следователно $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{11}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задача (2). Табл. 2 може да се разглежда като начална симплексна таблица на задача (2) с начално бдр $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 5, 1)^{\mathrm{T}}$.

Таблица 3

$\mathbf{x}_M^{(2)} = \mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	3	−3	0	0	0
x_4	0	0	−1	0	1	1/2	11/2
x_1	2	1	0	0	0	1/4	5/4
x_3	−3	0	0	1	0	1/4	1/4
$\overline{\mathbf{c}}$		0	3	0	0	1/4	−7/4

Пример 2. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. Въвеждаме изцяло изкуствен базис

$$z_M(\mathbf{x}_M) = 2x_1 - x_2 - x_3 + Mx_4 + Mx_5 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 2,\\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 &= 2,\\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

В табл. 4 и 5 е представено решаването на задачата с помощта на две симплексни таблици. Началното бдр е $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0, 0, 0, 2, 2)^\mathrm{T}$ и $z_M(\mathbf{x}_M^{(0)}) = 4M$. Относителната оценка на променливата x_1 е отрицателна. Затова x_1 влиза в базиса на мястото на x_4 (в този случай двете частни за определяне на ключовия ред са равни, така че да използваме правилото на Бленд). Новото бдр е $\mathbf{x}_M^{(1)} = (2, 0, 0, 0, 0)^\mathrm{T}$ и $z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = 4$. За него критерият за оптималност е изпълнен. Изкуствените променливи x_4 и x_5 имат нулеви стойности, въпреки че x_5 е базисна ($\mathbf{x}_M^{(1)}$ е изроден и x_5 е базисна нула). Следователно $\mathbf{x}^* = (2, 0, 0)^\mathrm{T}$ е решение на първоначалната канонична задача и въпреки че в табл. 5 $\bar{c}_0 = 0$ и $\bar{c}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, 5$, тя не може да се разглежда като симплексна таблица на $\mathbf{x}^*$ за каноничната задача, защото съдържа изкуствената базисна променлива x_5. Ако се нуждаем от базисен вид на каноничната задача спрямо оптимал-

Таблица 4

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	M	M	0
x_4	M	$\boxed{1}$	-1	2	1	0	2
x_5	M	1	-2	-4	0	1	2
$\bar{\mathbf{c}}$		$-2M+2$	$3M-1$	$2M-1$	0	0	$-4M$

Таблица 5

$\mathbf{x}_M^{(1)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	M	0
x_1	2	1	-1	2	0	2
x_5	M	0	$\boxed{-1}$	$\boxed{-6}$	1	0
$\bar{\mathbf{c}}$		0	$M+1$	$6M-5$	0	-4

ното решение $\mathbf{x}^*$, можем да изключим изкуствената променлива x_5, като в базиса на нейно място въведем коя да е от променливите x_2, x_3. След въвеждането на x_2 в базиса (ключовото число е -1), получаваме табл. 6, а при въвеждане на x_3 (ключовото число е -6) — табл. 7. Те съдържат базисния

Таблица 6

$\mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	0
x_1	2	1	0	8	2
x_2	-1	0	1	$\boxed{6}$	0
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	-11	-4

Таблица 7

$\mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	0
x_1	2	1	$-4/3$	0	2
x_3	-1	0	$1/6$	1	0
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$11/6$	0	-4

вид на каноничната задача спрямо $\mathbf{x}^*$ съответно при базиси $[x_1, x_2]$ и $[x_1, x_3]$. Понеже $\mathbf{x}^*$ е изроден, критерият за оптималност не е необходимо условие и се удовлетворява при базиса на табл. 7.

Пример 3. Да се реши, като се използва симплекс метода, задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + x_2 & \geq & 2, \\ (3) & x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 3, \\ & & & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

От последната симплексна таблица да се извлече възможната информация за оптималните решенията на задачата (ако има такива).

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид чрез допълнителните променливи x_4 и x_5 и чрез полагането $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$

$$\overline{z}(\mathbf{x}) = -2x_1 + 7x_2 - 3x_3^+ + 3x_3^- \to \min,$$

$$\begin{array}{rl} & x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ (4) & x_2 + x_5 = 4, \\ & x_1 - 2x_2 + x_3^+ - x_3^- = 3, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3^+,\ x_3^-,\ x_4,\ x_5 \geq 0. \end{array}$$

Съответната M-задача е

$$\overline{z}_M(\mathbf{x}_M) = -2x_1 + 7x_2 - 3x_3^+ + 3x_3^- + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 \qquad\qquad - x_4 \quad + x_6 &= 2,\\ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 \quad &= 4,\\ x_1 - 2x_2 + x_3^+ - x_3^- \qquad\qquad &= 3,\\ x_1,\ x_2,\ x_3^+,\ x_3^-,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

На табл. 8 се вижда информацията за началното бдр на M-задачата $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0,0,3,0,0,4,2)^{\mathrm{T}}$, $z_M(\mathbf{x}_M^{(0)}) = 2M-9$. Относителните оценки на променливите

Таблица 8

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-2	7	-3	3	0	0	M	0
x_6	M	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	0	1	2
x_5	0	0	1	0	0	0	1	0	4
x_3^+	-3	1	-2	1	-1	0	0	0	3
$\bar{\mathbf{c}}$		$-M+1$	$-M+1$	0	0	M	0	0	$-2M+9$

Таблица 9

$\mathbf{x}_M^{(1)} = \mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-2	7	-3	3	0	0	0
x_1	-2	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	2
x_5	0	0	1	0	0	0	1	4
x_3^+	-3	0	-3	1	-1	1	0	1
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	0	7

x_1 и x_2 са отрицателни (и равни). Нека x_1 да влезе в базиса. Тогава от базиса излиза изкуствената променлива x_6 и относителните оценки вече няма да зависят от M. След елементарно преобразование получаваме симплексната таблица, съответна на съседното бдр $\mathbf{x}_M^{(1)} = (2,0,1,0,0,4,0)^{\mathrm{T}}$, $z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = -7$, което е оптимално решение (вж. табл. 9). Изкуствената променлива x_6 е небазисна, следователно $\mathbf{x}^* = (2,0,1,0,0,4)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на каноничната задача (4). Оптималното решението $\mathbf{x}_{\text{и}}^*$ на изходната задача (3) получаваме от $\mathbf{x}^*$, като вземем предвид полагането $x_3 = x_3^+ - x_3^-$: $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (2,0,1)^{\mathrm{T}}$ и оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -\bar{z}(\mathbf{x}^*) = -z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = 7$.

Таблица 10

$\mathbf{x}_M^{(2)} = \mathbf{x}^{**}$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-2	7	-3	3	0	0	0
x_2	7	1	1	0	0	-1	0	2
x_5	0	-1	0	0	0	1	1	2
x_3^+	-3	3	0	1	-1	-2	0	7
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	0	7

Табл. 9 е симплексната таблица на $\mathbf{x}^*$. Понеже $\overline{c}_2 = 0$, $\overline{c}_3{}^- = 0$, то $\mathbf{x}^*$ не е единствено оптимално решение на задача (4). След въвеждането на x_2 в базиса се преминава към съседно бдр (табл. 10) $\mathbf{x}^{**} = (0, 2, 7, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. Следователно оптимални решения са и всички точки

$$\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda, 0, 0, 2+2\lambda)^{\mathrm{T}} \text{ за } \lambda \in [0, 1].$$

Понеже елементите на стълба $\mathbf{w}_3^-$ са неположителни, от $\mathbf{x}^*$ излиза неограничен ръб (при $x_3^- = t \geq 0$) с направляващ вектор $\mathbf{p}^* = (0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, чиито точки $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^* + t\mathbf{p}^* = (2, 0, 1+t, t, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ са също оптимални решения на задача (4) при $t \geq 0$. Тогава оптимални решения на каноничната задача (4) са

$$\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} + t\mathbf{p}^* = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda+t, t, 0, 2+2\lambda)^{\mathrm{T}}$$

за $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$. Съответните решения $\mathbf{x}_\lambda^*$ за изходната задача (3) са $\mathbf{x}_\lambda^* = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$. При $\lambda = 0$ имаме бдр $\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (0, 2, 7)^{\mathrm{T}}$, а при $\lambda = 1$ — бдр $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Оптималните решения на задача (3) са точките от отсечката, съединяваща въховете $\mathbf{x}_{\text{и}}^*$ и $\mathbf{x}_{\text{и}}^{**}$.

Пример 4. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = -5x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 2, \\ x_1 - 2x_2 &\geq 0, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Каноничната задача е ($x_2 = x_2^+ - x_2^-$ и второто ограничение е умножено с -1, за да може допълнителната променлива в КЗ да се използва за базисна)

$$
(6)\qquad
\begin{gathered}
\widetilde{z}(\mathbf{x}) = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \to \min,\\
\begin{aligned}
x_1 - x_2^+ + x_2^- - x_3 &= 2,\\
-x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_4 &= 0,\\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_5 &= 1,
\end{aligned}\\
x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{gathered}
$$

Системата уравнения (6) е решена спрямо x_4 и x_5, затова въвеждаме само една изкуствена променлива x_6. Получаваме M-задачата

$$
\begin{gathered}
z_M(\mathbf{x}_M) = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + Mx_6 \to \min,\\
\begin{aligned}
x_1 - x_2^+ + x_2^- - x_3 + x_6 &= 2,\\
-x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_4 &= 0,\\
2x_1 - x_2^+ + x_2^- + x_5 &= 1,
\end{aligned}\\
x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
\end{gathered}
$$

Табл. 11 съдържа хода на решаването на задачата. Базисното допустимо решение $\mathbf{x}_M^{(1)} = (0, 0, 1, 0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ е оптимално за M-задачата, но изкуствената променлива x_6 има ненулева стойност, следователно каноничната задача (6) няма решение, понеже допустимото ѝ множество е празно. Това означава, че и изходната задача (5) няма решение по същата причина (проверете геометрично!).

Таблица 11

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-5	2	-2	0	0	0	M	0	
x_6	M	1	-1	1	-1	0	0	1	2	
x_4	0	-1	2	-2	0	1	0	0	0	$\mathbf{x}_M^{(0)}$
x_5	0	2	-1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	1	
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M-5$	$M+2$	$-M-2$	M	0	0	0	$-2M$	
x_6	M	-1	0	0	-1	0	-1	1	1	
x_4	0	3	0	0	0	1	2	0	2	$\mathbf{x}_M^{(1)}$
x_2^-	-2	2	-1	1	0	0	1	0	1	
$\overline{\mathbf{c}}$		$M-1$	0	0	M	0	$M+2$	0	$-M+2$	

Пример 5. Да се реши задачата

$$
\begin{aligned}
& z(\mathbf{x}) = x_1 \to \max, \\
& -x_1 + 2x_2 \geq 0, \\
& -x_1 + x_2 \leq 1, \\
& x_1 + x_2 \geq 1, \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Решение. Каноничната задача е

$$
\begin{aligned}
& \bar{z}(\mathbf{x}) = -x_1 \to \min, \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\
& x_1 + x_2 - x_5 = 1, \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 5,
\end{aligned} \tag{8}
$$

а M-задачата —

$$
\begin{aligned}
& z_M(\mathbf{x}_M) = -x_1 + Mx_6 \to \max, \\
& x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\
& x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1, \\
& x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 6.
\end{aligned}
$$

M-задачата е решена на табл. 12. От последната симплексна таблица се вижда, че $\bar{c}_5 > 0$, $\mathbf{w}^5 < \mathbf{0}$, т. е. M-задачата няма решение, защото $z_M(\mathbf{x}_M)$ намалява неограничено в допустимото ѝ множество. Следователно каноничната задача (8), а оттам и изходната задача (7) нямат решение. В случая е ясна причината за това. Втората и третата симплексни таблици не съдържат изкуствената променлива x_6 и могат да се разглеждат като симплексни таблици на каноничната задача (8) за бдр $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0)^{\mathrm{T}}$. От третата симплексна таблица е ясно, че целевата функция $\bar{z}(\mathbf{x})$ е неограничена в допустимото ѝ множество. Следователно и задача (7) няма решение по същата причина (проверете геометрично!).

Задачи

1. Да се решат със симплекс-метода дадените задачи. Ако задачата е разрешима, да се намерят:

Таблица 12

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-1	0	0	0	0	M	0	
x_3	0	1	-2	1	0	0	0	0	
x_4	0	-1	1	0	1	0	0	1	$\mathbf{x}_M^{(0)}$
x_6	M	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	1	
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M-1$	$-M$	0	0	M	0	$-M$	
x_3	0	$\boxed{3}$	0	1	0	-2		2	
x_4	0	-2	0	0	1	1		0	$\mathbf{x}_M^{(1)}; \mathbf{x}^{(1)}$
x_2	0	1	1	0	0	-1		1	
$\overline{\mathbf{c}}$		-1	0	0	0	0		0	
x_1	-1	1	0	$1/3$	0	$-2/3$		$2/3$	
x_4	0	0	0	$2/3$	1	$-1/3$		$4/3$	$\mathbf{x}_M^{(2)}; \mathbf{x}^{(2)}$
x_2	0	0	1	$-1/3$	0	$-1/3$		$1/3$	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	$1/3$	0	$-2/3$		$2/3$	

а) всички съседни оптимални бдр;

б) оптималните решения, които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от намереното оптимално бдр;

в) оптималните решения, които следват от а) и б):

1.1. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 16x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq -4, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 6, \\ -x_1 - 8x_2 &= -8, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2; \end{aligned}$$

1.2. $z(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1 - 2x_3 &\geq 3, \\ -x_1 + x_3 &\geq -2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.3. $z(\mathbf{x}) = 6x_1 + 4x_2 - 14x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3, \\ x_2 + x_3 &\geq 2, \\ 0 \leq x_3 &\leq 4, \\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.4. $z(\mathbf{x}) = 4x_1 - 10x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq -1, \\ -4x_1 + 2x_2 &\geq 0, \\ -x_1 - x_2 &\leq -2, \\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.5. $z(\mathbf{x}) = 2x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad &\geq 6, \\ -x_1 + x_2 \qquad &\leq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.6. $z(\mathbf{x}) = -2x_1 - 6x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\geq -9, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ -3x_1 + 7x_2 &\leq 61; \end{aligned}$$

1.7. $z(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \qquad &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.8. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -1, \\ x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.9. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 \qquad &\geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \qquad &\geq -2, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3; \end{aligned}$$

1.10. $z(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -4, \\ 5x_1 - 3x_2 &\geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 23; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.11. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 8x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 9, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4, \\ x_1 - 4x_2 &\geq -17; \\ x_1 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.12. $z(\mathbf{x}) = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 \qquad &\geq -4, \\ -x_1 + 2x_2 \qquad &\leq -3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. По дадените симплексни таблици на бдр $\mathbf{x}_M$ на M-задача да се напише M-задачата, изходната канонична задача, координатите на $\mathbf{x}_M$ и да се намери за кои стойности на параметрите a и b:

а) $\mathbf{x}_M$ е оптимално решение на задачата;

б) $\mathbf{x}_M$ не е единствено оптимално решение. Да се намерят съседните на $\mathbf{x}_M$ оптимални бдр (ако има такива). Да се напише аналитичният израз на тези решения на M-задачата, които следват от намерените бдр и информацията в таблицата;

в) каноничната задача няма оптимално решение — да се посочи причината;

г) каноничната задача има оптимално решение в случаите а) и б). Да се напише вида на решенията;

д) M-задачата е изродена.

2.1. $\mathbf{x}_M$

B	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-2	0	-4	0	M
x_5	b	0	a	-2	0	1
x_1	1	1	$-a$	-1	0	0
x_4	2	0	1	1	1	0

2.2. $\mathbf{x}_M$

B	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	0	-1	1	M
x_1	b	1	$-3b$	0	0
x_4	a	0	0	0	1
x_3	3	0	$-b$	1	0

2.3. $\mathbf{x}_M$

B	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	0	0	$-b$	M
x_2	1	1	1	$1-b$	0
x_4	$a-1$	$a-1$	0	0	1

2.4. $\mathbf{x}_M$

B	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	0	-1	$-b$	0	M
x_3	a	b	a	1	0	0
x_4	1	1	0	0	1	0
x_5	b	b	b	0	0	1

3. Да се намерят всички точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ от множеството

$$P : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ \quad x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 4, \end{cases}$$

за които функцията $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ има стойност 20.

4. В задача 1.4 да се намерят всички точки $\mathbf{x}$, за които целевата функция $z(\mathbf{x})$ има стойност -100.

5. Във всяка от следващите задачи е дадена симплексната таблица на бдр $\mathbf{x}_M$ на M-задача, в чийто базис участват изкуствени променливи. Да се напишат M-задачата, изходната канонична задача и координатите на $\mathbf{x}_M$.

а) Можете ли (от таблицата) да се посочи бдр $\bar{\mathbf{x}}$ на каноничната задача?

б) С най-малко колко елементарни преобразования може да се премине към базис, в който няма изкуствени променливи? Да се направят тези елементарни преобразования (ако има такива). Да се напишат координатите на полученото бдр.

5.1. $\mathbf{x}_M$

B	$\overline{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	0	−2	−1	M
x_1	3	1	2	1	0
x_4	0	0	−1	−3	1

5.2. $\mathbf{x}_M$

B	$\overline{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4
	0	−1	−1	−1	M
x_3	2	1	2	1	0
x_4	0	−1	0	0	1

5.3. $\mathbf{x}_M$

B	$\overline{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	−1	−1	0	M	M
x_1	5	1	2	0	0	0
x_4	0	0	−1	0	1	0
x_5	0	0	−2	−4	0	1

5.4. $\mathbf{x}_M$

B	$\overline{\mathbf{x}}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	−1	−1	0	M	M
x_1	5	1	2	1	0	0
x_4	0	0	−1	1	1	0
x_5	0	0	−2	0	0	1

6. *Спомагателна задача* на каноничната задача (K) се нарича задачата

$$\begin{aligned}
&\bar{z}(\mathbf{x}_M) = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \ i = 1,\dots,m, \qquad (9)\\
&x_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,n+m.
\end{aligned}$$

Променливите x_{n+i}, $i = 1,\dots,m$, се наричат *изкуствени променливи*. Да се докаже, че:

а) задача (9) е разрешима;

б) ако оптималната стойност $\bar{z}^* > 0$, допустимото множество $\overline{P}$ на задача (K) е празно;

в) ако оптималната стойност $\bar{z}^* = 0$ и $\mathbf{x}_M^* = (x_1^*,\dots,x_{n+m}^*)^{\mathrm{T}}$ е бдр на задачата (9), то $\mathbf{x}^* = (x_1^*,\dots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$ е бдр на задача (K).

7. Да се опише процедура за решаване на канонична задача без известен начален базис, като вместо M-задача се използва спомагателната задача (9).

8. Да се обоснове забележка 3.

Отговори и решения

1.1. Допълнителни променливи x_3, x_4. Начален базис $[x_3, x_4, x_5]$, x_5 е изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $(0, 1, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (0, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 16$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_1 = 0$) $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{56}{17}, \frac{10}{17}, \frac{104}{17}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, за изходната задача $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = \left(\frac{56}{17}, \frac{10}{17}\right)^{\mathrm{T}}$. б) Няма. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = \left(\frac{56}{17} - \lambda\frac{56}{17}, \frac{10}{17} + \lambda\frac{7}{17}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$.

1.2. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. Начален базис $[x_2, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $\mathbf{x}^*_M = (1, 3, 0, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 4$. а) Няма. б) Няма. Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_3^+ = 0$) $\mathbf{x}^t = (1, 3, t, 1 + t, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}^t_{\text{и}} = (1, 3, t - (1 + t))^{\mathrm{T}} = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^*_{\text{и}}$.

1.3. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Начален базис $[x_1^+, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $\mathbf{x}^*_M = (1, 0, 2, 0, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 14$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_3 = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (7, 0, 0, 2, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, а на $\mathbf{x}^*_{\text{и}}$ е $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (7, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. б) Няма. Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_1^- = 0$) $\mathbf{x}^t = (1 + t, t, 2, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}^t_{\text{и}} = (1 + t - t, 2, 0)^{\mathrm{T}} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^*_{\text{и}}$. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (7 - 6\lambda, 2\lambda, 2 - 2\lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.4. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Начален базис $[x_6, x_4, x_7]$, x_6, x_7 изкуствени променливи. M-задачата няма крайно решение (вж. например стълба x_5 от табл. 13 за $\tilde{\mathbf{x}}$), следователно КЗ и изходната задача са неразрешими. От стълба x_5 от табл. 13 за бдр $\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 2, 3, 4, 0)^{\mathrm{T}}$ на КЗ е ясно, че $z(\mathbf{x}) \to +\infty$ в допустимото множество.

1.5. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимално решение на M-задачата

Таблица 13

$\tilde{\mathbf{x}}$; $\overline{\mathbf{x}}$

B	$\overline{\mathbf{x}}_B$	x_1^+	x_1^-	x_5
x_2	2	1	−1	−1
x_4	4	6	−6	−2
x_3	3	3	−3	−2
	20	14	−14	−10

(табл. 14) $\mathbf{x}^*_M = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, \frac{36}{5}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $z_M(x) = -4$, на КЗ $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, \frac{36}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$,

Таблица 14

$\tilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_2^-	x_4	x_5
x_3	$36/5$	0	$-2/5$	$9/5$
x_1	$3/5$	0	$-1/5$	$-3/5$
x_2^+	$8/5$	-1	$-1/5$	$2/5$
	4	0	0	1

на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{36}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -4$. а) Няма. б) Оптимални неограничени ръбове на КЗ, излизащи от $\mathbf{x}^*$ ($\bar{c}_2^- = 0$) $\mathbf{x}^t = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5} + t, t, \frac{36}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$ и ($\bar{c}_4 = 0$), $\mathbf{x}^r = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{8}{5} + \frac{1}{5}r, 0, \frac{36}{5} + \frac{2}{5}r, r, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$. За изходната задача оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}^r_{\text{и}} = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{8}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{36}{5} + \frac{2}{5}r\right)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$. в) Точките $\mathbf{x}^r_{\text{и}}$, $r \geq 0$.

1.6. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1' - \xi$, $x_2 = x_2' - \xi$. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата (табл. 15) $\mathbf{x}^*_M = (6, 0, 0, 33, 0, 79, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (6, 0, 0, 33, 0, 79)^{\mathrm{T}}$,

Таблица 15

$\tilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_2'	ξ	x_4
x_3	33	11	-11	-4
x_1'	6	3	-4	-1
x_5	79	16	-16	-3
	-12	0	0	2

на изходната задача $\mathbf{x}^* = (6, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -12$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\bar{c}_2' = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (0, 2, 0, 11, 0, 47)^{\mathrm{T}}$, за изходната задача $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (0, 2)^{\mathrm{T}}$. б) Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\bar{c}_\xi = 0$) с направляващ вектор $\bar{\mathbf{p}} = (4, 0, 1, 11, 0, 16)^{\mathrm{T}}$, съответно за изходната задача $\mathbf{p} = (3, -1)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$. в) $\mathbf{x}^{\lambda t}_{\text{и}} = \lambda \mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} + t\mathbf{p} = (6\lambda + 3t, 2 - 2\lambda - t)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$.

1.7. Допълнителна променлива x_4. Изкуствен начален базис $[x_5, x_6, x_7]$.

M-задачата няма оптимално решение, следователно КЗ и изходната задача са неразрешими.

1.8. Допълнителни променливи x_3, x_4. Начален базис $[x_3, x_5, x_4]$, x_5 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $\mathbf{x}_M^* = (1{,}0{,}0{,}1{,}0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 1$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_2 = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, съответно $\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. б) Няма. в) $\mathbf{x}_{\text{и}}^{\lambda} = \lambda\mathbf{x}_{\text{и}}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (\lambda, 1 - \lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.9. Допълнителни променливи x_4, x_5. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. M-задача: стига се до едно от двете оптимални бдр $\mathbf{x}_M^* = (1, 0, 2, 0, 4, 0)^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{x}_M^{**} = (0, 1, 6, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $z_M^* = -4$. а) Съответни оптимални бдр на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 6, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $x_{\text{и}}^{**} = (0, 1, 6)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 4$. б) Няма. в) $\mathbf{x}_{\text{и}}^{\lambda} = \lambda\mathbf{x}_{\text{и}}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (\lambda, 1 - \lambda, 6 - 4\lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.10. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. M-задача: стига се до едно от двете оптимални бдр $\mathbf{x}_M^* = (4, 5, 5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{x}_M^{**} = (7, 3, 0, 21, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. а) Съответни оптимални бдр на КЗ $\mathbf{x}^* = (4, 5, 5, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**} = (7, 3, 0, 21, 0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (4, 5)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (7, 3)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 46$. б) Няма. в) $\mathbf{x}_{\text{и}}^{\lambda} = \lambda\mathbf{x}_{\text{и}}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (7 - 3\lambda, 3 + 2\lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.11. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата (табл. 16) $\mathbf{x}_M^* = (3, 5, 0, 0, 9, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z_M^* = 34$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (3, 5, 0, 0, 9, 0)^{\mathrm{T}}$, на

Таблица 16

$\tilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	$\overline{\mathbf{x}}_B$	x_2^-	x_3	x_5
x_4	9	0	$-6/5$	$7/5$
x_2	5	-1	$-1/5$	$2/5$
x_1	3	0	$-4/5$	$3/5$
	34	0	0	2

изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (3, 5)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -34$. а) Няма. б) Оптимални неограничени ръбове на КЗ, излизащи от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_2^- = 0$) $\mathbf{x}^t = (3, 5 + t, t, 0, 9, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, и ($\overline{c}_3 = 0$) $\mathbf{x}^r = \left(3 + \frac{4}{5}r, 5 + \frac{1}{5}r, 0, r, 9 + \frac{6}{5}r, 0\right)$, $r \geq 0$; за изходната задача оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}_{\text{и}}^r = \left(3 + \frac{4}{5}r, 5 + \frac{1}{5}r\right)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$. в) Точките $\mathbf{x}_{\text{и}}^r$, $r \geq 0$.

1.12. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. Начален базис $[x_3^+, x_4, x_6]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата (табл. 17) $\mathbf{x}_M^* = (3,0,0,2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (3,0,0,2,1,0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (3,0,-2)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -22$. а) Няма. б) Няма; оптимален неограничен

Таблица 17

$\tilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}^*$

B	$\bar{\mathbf{x}}_B$	x_2	x_3^+	x_5
x_1	3	−2	0	−1
x_4	1	1	0	1
x_3^-	2	−5	−1	−1
	−22	18	0	8

ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\bar{c}_3^+ = 0$) $\mathbf{x}^t = (3,0,t,2+t,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^t = (3,0,t-(2+t))^{\mathrm{T}} = (3,0,-2)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_{\text{и}}^*$.

2.1. $\mathbf{x}_M = (1,0,0,2,b)^{\mathrm{T}}$, $b \geq 0$. За x_2, x_3: $\bar{c}_2 = 2a - aM$, $\bar{c}_3 = 6 - 2M$. а) $a \leq 0$. б) $a = 0$. Съседно бдр $\mathbf{x}_M' = (1,2,0,0,b)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^\lambda = \lambda\mathbf{x}_M + (1-\lambda)\mathbf{x}_M' = (1,2-2\lambda,0,2\lambda,b)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$. в) За $b \neq 0$, $a \leq 0$ допустимото множество на КЗ е празно. г) $b = 0$, $a \leq 0$. При $a = 0$ $\mathbf{x}_M^\lambda = (1,2-2\lambda,0,2\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$; при $a < 0$ $\mathbf{x}_M^* = (1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$. д) $b = 0$.

2.2. $\mathbf{x}_M = (b,0,3,a)^{\mathrm{T}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. За x_2: $\bar{c}_2 = 1 - b + 2aM$. а) $\bar{c}_2 \leq 0$, т. е. $a = 0$, $b \geq 1$. б) $a = 0$, $b = 1$; оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}^t = (1+3t, t, 3+t, 0)^{\mathrm{T}}$. в) $a = 0$, $0 \leq b < 1$: M-задачата и следователно и КЗ нямат оптимално решение. г) $a = 0$, $b \geq 1$. При $b = 1$ $\mathbf{x}^t = (1+3t, t, 3+t)^{\mathrm{T}}$, при $b > 1$ $\mathbf{x}^* = (1,0,3)^{\mathrm{T}}$. д) $a = 0$ и/или $b = 0$.

2.3. $\mathbf{x}_M = (0,1,0,a-1)^{\mathrm{T}}$, $a \geq 1$. За x_1, x_3: $\bar{c}_1 = (a-1)M$, $\bar{c}_3 = b$. а) $a = 1$, $b \leq 0$; б) $a = 1$, $b \leq 0$. При $a = 1$, $b < 0$ съседно бдр $\mathbf{x}_M' = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$; оптимални решения: $\mathbf{x}_M^\lambda = \lambda\mathbf{x}_M + (1-\lambda)\mathbf{x}_M' = (1-\lambda,\lambda,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$. При $a = 1$, $b = 0$ бдр: $\mathbf{x}_M'$ и $\mathbf{x}_M'' = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$; оптимални решения: $\mathbf{x}_M^\lambda = \lambda_1\mathbf{x}_M + \lambda_2\mathbf{x}_M' + \lambda_3\mathbf{x}_M'' = (\lambda_2,\lambda_1,\lambda_3,0)^{\mathrm{T}}$ за $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$. в) $b > 1$. M-задачата и КЗ нямат оптимално решение. д) $a = 1$.

2.4. $\mathbf{x}_M = (0,0,a,1,b)^{\mathrm{T}}$, $a,b \geq 0$. За x_1, x_2: $\bar{c}_1 = -b^2 + bM$, $\bar{c}_2 = (1-ab) + bM$. а), б) Няма такива a, b. в) $b = 0$, $a = 0$. M-задачата и КЗ нямат оптимално решение. г) a, b не могат да се определят от таблицата, понеже $\mathbf{x}_M$ не е оптимално решение за никои a, b. д) $a = 0$ и/или $b = 0$.

3. Решава се задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 4,\\ -x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 &= 3,\\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3+x_4} &= 20,\\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,4. \end{aligned}$$

M-задача: начален базис $[x_5, x_4, x_6]$, x_5 и x_6 изкуствени променливи. Достига се до едно от двете оптимални съседни бдр $\mathbf{x}^* = (16, 12, 0, 31)^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{x}^{**} = (10, 0, 6, 13)^{\mathrm{T}}$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} = (10 + 6\lambda, 12\lambda, 6 - 6\lambda, 13 + 18\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$ и за тях $z^* = z(\mathbf{x}^\lambda) = 20$.

4. Решава се задачата

$$\bar{z}(\mathbf{x}) = -4x_1 + 10x_2 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le -1,\\ -4x_1 + 2x_2 &\ge 0,\\ -x_1 - x_2 &\le -2,\\ -4x_1 + 10x_2 &= 100,\\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Начален базис $[x_6,x_4,x_7,x_8]$, x_6, x_7, x_8 изкуствени променливи. При решаване на M-задачата се достига до две оптимални съседни бдр $\mathbf{x}'_M = (0,0,10,19,20,8,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}''_M = \left(0, \frac{40}{7}, \frac{54}{7}, \frac{141}{7}, \frac{268}{7}, 0, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$. Съответните бдр на КЗ са $\mathbf{x}^* = (0, 0, 10, 19, 20, 8)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^{**} = \left(0, \frac{40}{7}, \frac{54}{7}, \frac{141}{7}, \frac{268}{7}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\bar{z}^* = 100$. Всички оптимални решения на КЗ са

$$\lambda\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} = (0, \tfrac{40}{7} - \tfrac{40}{7}\lambda, \tfrac{54}{7} + \tfrac{16}{7}\lambda, \tfrac{141}{7} - \tfrac{8}{7}\lambda, \tfrac{268}{7} - \tfrac{128}{7}\lambda, 8\lambda)^{\mathrm{T}}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Оптималните решения на изходната задача са $\mathbf{x}^\lambda = \left(-\frac{40}{7} + \frac{40}{7}\lambda, \frac{54}{7} + \frac{16}{7}\lambda\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$ и за тях $z^* = z(\mathbf{x}^\lambda) = -100$.

5.1. $\mathbf{x}_M = (3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. а) $\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. б) Едно: въвеждане на x_2 или x_3 в базиса; и в двата случая само се сменя базисът на $\mathbf{x}_M$ ($\mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$).

5.2. $\mathbf{x}_M = (0, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. а) $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. б) Едно: въвеждане на x_1 в базиса; сменя се само базисът на $\mathbf{x}_M$ ($\mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$).

5.3. $\mathbf{x}_M = (5,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. а) $\overline{\mathbf{x}} = (5,0,0)^{\mathrm{T}}$; б) Две: въвеждат се x_2 (ключово число -1) и x_3 (ключово число -4): получават се само други базиси на $\mathbf{x}_M$ ($\mathbf{x}''_M = \mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$).

5.4. $\mathbf{x}_M = (3,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. а) $\overline{\mathbf{x}} = (3,0,0)^{\mathrm{T}}$. б) Две: въвеждат се x_3 на мястото на x_4 ($\mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$) и x_2 на мястото на на x_5 (ключово число -2): $\mathbf{x}''_M = \mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$.

6. а) Допустимото множество не е празно, защото $\mathbf{x}'_M = (0,\dots,0,b_1,\dots,b_m) \in \overline{P}$. Освен това целевата функция е ограничена отдолу, защото $z(\mathbf{x}_M) \geq 0$. б) От допускането $\mathbf{x}' = (x'_1,\dots,x'_n) \in P \neq \emptyset$ следва, че $\mathbf{x}'_M = (x'_1,\dots,x'_n,0,\dots,0) \in \overline{P}$, откъдето се стига до противоречието $\overline{z}(\mathbf{x}_M) = 0 < \overline{z}^*$. в) $\mathbf{x}^* \in P$ и освен това $\mathbf{x}^*$ е бдр, защото на ненулевите му координати съответстват линейно независими стълбове на матрицата $\mathbf{A}$ (допускането, че тези стълбове са линейно зависими, води до противоречие с факта, че $\mathbf{x}^*_M$ е бдр).

7. Решаваме задача (9) при начално бдр $\mathbf{x}^{(0)}_M = (0,\dots,0,b_1,\dots,b_m)^{\mathrm{T}}$ с базис $\mathcal{B}_{\mathbf{x}^{(0)}_M} = [x_{n+1},\dots,x_{n+m}]$.

- Ако оптималната стойност $\overline{z}^* > 0$, задачата (K) няма решение.
- $\overline{z}^* = 0$, $\mathbf{x}^*_M = (x^*_1,\dots,x^*_{n+m})^{\mathrm{T}}$. Ако в $\mathcal{B}_{\mathbf{x}^*_M}$ има изкуствени променливи, те са базисни нули, които изключваме от базиса (вж. забележка 3). Решаваме задача (K) при начално бдр $\mathbf{x}^{(0)} = (x^*_1,\dots,x^*_n)$ и $\mathcal{B}_{\mathbf{x}^{(0)}} = \mathcal{B}_{\mathbf{x}^*_M}$. За начална симплексна таблица може да се използва тази на $\mathbf{x}^*_M$ (в нея стълбовете x_{n+i}, $i = 1,\dots,m$, са премахнати), като се впишат коефициентите $c_1,\dots,c_n$ (вместо нулите) в стълба $\mathbf{c}_B$ и над стълбовете x_j, $j = 1,\dots,n$. След това се пресмятат относителните оценки на $\mathbf{x}^{(0)}$.

8. Имаме $x_{n+p} = \overline{x}_{j_p} = 0$. В този случай (от формулите за елементарно преобразование на симплексната таблица) следва, че $\overline{x}'_{j_i} = \overline{x}_{j_i}$, $i = 1,\dots,m$, за всяко $w_{pq} \neq 0$ (сменя се само базисът на бдр).

Упражнение 9, 10

Двойственост в линейното оптимиране

С всяка задача на ЛО може да бъде асоциирана друга задача на ЛО, наречена *двойствена* (или *спрегната*, *дуална*) на дадената. Връзките между тези две задачи ни позволяват:

- ако разполагаме с информация за разрешимостта на едната от тях, да имаме достатъчно информация и за разрешимостта на другата задача;

- ако знаем оптимално решение на едната задача да получим оптимално решение и на двойствената ѝ.

Двойствеността намира широко приложение при икономическата интерпретация на математическите модели, довели до съответната задача на ЛО. Този елемент на двойствеността ще бъде обект на част от упражненията по дисциплината Математическо оптимиране 2.

1. Права задача

Всяка задача на ЛО може да бъде сведена (чрез евентуална смяна на критерия и умножаване на ограниченията от тип $\leq$ с -1) до задача от вида

$$
(P) \qquad
\begin{aligned}
\min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \\
\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &\geq b_i, \quad i \in I, \\
\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &= b_i, \quad i \in \overline{I}, \\
x_j &\geq 0, \quad\ j \in J, \\
x_j &\gtrless 0, \quad\ j \in \overline{J}.
\end{aligned}
$$

Така получената задача се нарича *права задача*. Тук I е индексно множество, подмножество на множеството $\{1,\ldots,m\}$ от индекси на ограниченията, като $\overline{I} := \{1,\ldots,m\} \setminus I$, а J е индексно множество, подмножество на множеството $\{1,\ldots,n\}$ от индекси на променливите, като $\overline{J} := \{1,\ldots,n\} \setminus J$. Знакът $\gtrless$ използваме за означаване на свободните променливи. Така при КЗЛО $I = \overline{J} = \emptyset$.

Нека $\mathbf{A}$ е матрицата, чиито елементи по редове са координатите на векторите $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$, $i = 1,\ldots,m$. Така получаваме $m \times n$ матрицата от коефициентите пред неизвестните в левите страни на ограниченията на задачата. Вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, както и преди, ще означаваме с $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \ldots, n$. Векторът на целевата функция $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^{\mathrm{T}}$ и векторът на променливите $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ са от $\mathbb{R}^n$, а векторът с десните страни на ограниченията $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$ е от $\mathbb{R}^m$.

2. Двойствена задача. Правила за написването ѝ

Определение 1. Задачата

$$
(DP) \qquad \begin{aligned}
\max v(\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \\
\pi_i &\geq 0, \quad i \in I, \\
\pi_i &\lessgtr 0, \quad i \in \overline{I}, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &\leq c_j, \quad j \in J, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &= c_j, \quad j \in \overline{J}.
\end{aligned}
$$

се нарича двойствена на задачата (P).

Твърдение 1. Двойствената на задачата (DP) е задачата (P).

Затова обикновено говорим за двойка *спрегнати* (*дуални*) *задачи*.

За по-голяма яснота при формулиране на правилата за писане на двойствената задача да напишем двете задачи една до друга

$$
\begin{aligned}
\min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \\
\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &\geq b_i, \quad i \in I, \\
\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &= b_i, \quad i \in \overline{I}, \\
x_j &\geq 0, \quad j \in J, \\
x_j &\gtrless 0, \quad j \in \overline{J},
\end{aligned}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
\max v(\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \\
\pi_i &\geq 0, \quad i \in I, \\
\pi_i &\lessgtr 0, \quad i \in \overline{I}, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &\leq c_j, \quad j \in J, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &= c_j, \quad j \in \overline{J}.
\end{aligned}
$$

1. На всяко ограничение на правата задача се съпоставя променлива на двойствената задача, като на ограничение неравенство (равенство) съответства неотрицателна (свободна) променлива.

2. На всяка променлива на правата задача се съпоставя ограничение на двойствената задача, като на неотрицателна (свободна) променлива съответства ограничение неравенство (равенство).

3. Ако правата задача е за минимум (максимум), двойствената е за максимум (минимум). Коефициентите на целевата функция на спрегнатата

задача са десните страни на ограниченията на правата задача, а десните страни на ограниченията на двойствената задача са коефициентите на целевата функция на правата задача. Матриците от коефициентите пред неизвестните в левите страни на ограниченията на двете спрегнати задачи са транспонирани една на друга.

При писане на двойствената задача определящ е критерият (максимум или минимум) на дадената задача. Ако има ограничения на задачата от тип неравенство, които не са съгласувани с критерия, те се умножават с -1. След това се записва съответната спрегната задача.[1]

3. Основни теореми за двойственост

Теорема 1. За всяка двойка спрегнати задачи на ЛО е възможен точно един от следните три случая:

(а) Двете задачи имат оптимално решение. За всеки две допустими решения $\mathbf{x}$ на правата задача и $\boldsymbol{\pi}$ на двойствената задача е в сила неравенството

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi},$$

като равенство се достига тогава и само тогава, когато $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\pi}$ са оптимални решения на съответните задачи.

(б) Ако целевата функция на едната от двойка спрегнати задачи е неограничена върху допустимото ѝ множество, допустимото множество на двойствената ѝ задача е празно.

(в) Допустимите множества на двете задачи са празни.

От последните два случая става ясно, че твърдението в (б) не е обратимо, т. е. при празно допустимо множество на едната от двойка спрегнати задачи не е ясно (без допълнително изследване) защо дуалната задача няма решение. Освен това ако е известно, че двете спрегнати задачи имат допустими решения, то е налице случаят (а).

Теорема 2 (Условия за допълнителност)**.** Векторите $\mathbf{x}^*$ и $\boldsymbol{\pi}^*$, допустими съответно за правата и двойствената задача, са оптимални решения на

[1] Двойствената задача може да бъде записана и без да се съгласуват ограниченията от тип неравенство с критерия, но тогава съответните двойствени променливи не са неотрицателни, а *неположителни*!

съответните задачи тогава и само тогава, когато

$$\pi_i^*(\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$(\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* - c_j)x_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Горните равенства са изпълнени автоматично за $i \in \overline{I}$ и $j \in \overline{J}$, защото за тези индекси ограниченията на съответните задачи са равенства. Така интересни са само индексите от индексните множества I и J. Сега ще изкажем Теорема 2 по друг начин. За целта даваме следните две определения.

Определение 2. Условията (ограниченията)

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_i \quad \text{и} \quad \pi_i \geq 0 \quad \text{за фиксирано } i \in I, \\ &x_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leq c_j \quad \text{за фиксирано } j \in J, \end{aligned} \tag{1}$$

се наричат *двойка спрегнати условия*.

Определение 3. Едно условие (от тип неравенство) в задача на ЛО се нарича *свободно*, ако за поне едно оптимално решение на задачата е удовлетворено като строго неравенство и *закрепено*, ако всяко оптимално решение го удовлетворява като равенство.

Така Теорема 2 има следната проста формулировка: Ако двойка спрегнати задачи са разрешими, то от всяка двойка спрегнати условия едното е свободно, а другото — закрепено.

Пример 1. Да се напише двойствената задача на задачата

$$z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & & & \leq & 5, \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 54, \\ & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -9, \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array} \tag{2}$$

Да се провери дали $\overline{\mathbf{x}} = (2, 0, 9)^{\mathrm{T}}$ и $\overline{\boldsymbol{\pi}} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ са оптимални решения съответно на задача (2) и на нейната спрегната задача.

Решение. Умножаваме предварително с -1 третото ограничение в (2) и след всяко ограничение пишем съответната двойствена променлива

$$z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \max,$$
$$\begin{array}{rcrcrcr|l} & & x_2 & & & \leq & 5, & \pi_1 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 54, & \pi_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 9, & \pi_3 \\ \multicolumn{7}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} & \end{array}$$

Така спрегнатата задача е

$$
v(\boldsymbol{\pi}) = 5\pi_1 + 54\pi_2 + 9\pi_3 \to \min,
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & 9\pi_2 \geq 9, \\
& \pi_1 + 4\pi_2 + \pi_3 \geq 5, \\
& 4\pi_2 + \pi_3 = 5, \\
& \pi_1 \geq 0,\ \pi_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Елементарно се проверява, че $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{\pi}}$ са допустими решения съответно на задачи (2) и (3), и понеже $z(\bar{\mathbf{x}}) = v(\bar{\boldsymbol{\pi}}) = 63$, то съгласно Теорема 1(a) те са оптимални.

Пример 2. Да се провери оптимален ли е векторът $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ за задачата

$$
z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max,
$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 \phantom{{}+ x_3} + 2x_4 &\leq 16, \\
-x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4, \\
- x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0, \\
x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4.&
\end{aligned}
$$

Решение. Спрегнатата задача е

$$
v(\boldsymbol{\pi}) = 16\pi_1 + 4\pi_2 \to \min,
$$

$$
\begin{aligned}
3\pi_1 - \pi_2 &\geq 2, \\
-\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 &\geq -1, \\
\pi_2 - 3\pi_3 &\geq 4, \\
2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 &\geq -6, \\
\pi_1 \geq 0.&
\end{aligned}
$$

Допускаме, че $\mathbf{x}^*$ (проверете допустимостта му) е оптимално решение. Тогава съгласно Теорема 2 в двойките спрегнати условия

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 16 & \text{и} & \pi_1 \geq 0, \\
x_1 \geq 0 & \text{и} & 3\pi_1 - \pi_2 \geq 2, \\
x_2 \geq 0 & \text{и} & -\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 \geq -1, \\
x_3 \geq 0 & \text{и} & \pi_2 - 3\pi_3 \geq 4, \\
x_4 \geq 0 & \text{и} & 2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 \geq -6
\end{array}
$$

едното е свободно, а другото — закрепено, т. е. от

$$\left|\begin{array}{l} x_1^* = 3 > 0 \\ x_3^* = 1 > 0 \\ x_4^* = 3 > 0 \end{array}\right. \qquad \text{следва} \qquad \left|\begin{array}{rcrcrcr} 3\pi_1^* & - & \pi_2^* & & & = & 2 \\ & & \pi_2^* & - & 3\pi_3^* & = & 4 \\ 2\pi_1^* & + & 2\pi_2^* & + & \pi_3^* & = & -6 \end{array}\right.$$

за всяко оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*)^{\mathrm{T}}$ на двойствената задача. Решаваме системата и получаваме $\boldsymbol{\pi}^* = (0, -2, -2)^{\mathrm{T}}$. Векторът $\boldsymbol{\pi}^*$ удовлетворява и останалите ограничения на двойствената задача. Така, допускайки, че $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение, намерихме допустимо решение на двойствената задача. Понеже $z(\mathbf{x}^*) = v(\boldsymbol{\pi}^*) = -8$, то $\mathbf{x}^*$ наистина е оптимално решение съгласно Теорема 1(a).

Нека коефициентът пред x_2 в целевата функция не е -1, а 7. Това води до промяна на дясната страна на второто ограничение на двойствената задача

$$-\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 \geq 7. \tag{4}$$

Отново стигаме до вектора $\boldsymbol{\pi}^* = (0, -2, -2)^{\mathrm{T}}$. Сега обаче той не удовлетворява ограничението (4). В този случай векторът $\mathbf{x}^*$ не е оптимално решение на дадената задача, тъй като допускането, че $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение и прилагането на Теорема 2 не води до допустим за двойствената задача вектор, който удовлетворява условията за допълнителност.

Пример 3. Да се провери оптимален ли е векторът $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ за задачата

$$z(\mathbf{x}) = -x_1 + 3x_2 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 11, \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 7, \end{array}$$

$$x_1 \geq 0.$$

Решение. Спрегнатата задача на дадената е

$$v(\boldsymbol{\pi}) = 11\pi_1 + 7\pi_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\pi_1 & + & \pi_2 & & & \leq & -1, \\ & & \pi_2 & + & \pi_3 & = & 3, \\ -\pi_1 & & & - & 2\pi_3 & = & 0, \\ 2\pi_1 & - & \pi_2 & + & 3\pi_3 & = & 1, \\ & & & & \pi_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Системата ограничения на спрегнатата задача е несъвместима. От първите две равенства изразяваме π_2 и π_1 чрез π_3 и заместваме в третото. Последователно получаваме

$$\pi_2 = 3 - \pi_3, \quad \pi_1 = -2\pi_3 \Rightarrow 2\pi_1 - \pi_2 + 3\pi_3 = -4\pi_3 - 3 + \pi_3 + 3\pi_3 = -3 \neq 1,$$

т. е. допустимото множество на двойствената задача е празно. От Теорема 1 следва, че изходната задача е неразрешима. Тъй като допустимото множество на дадената задача не е празно (лесно се проверява, че $\mathbf{x}^*$ е допустим), то тогава целевата ѝ функция е неограничена.

Пример 4. Да се провери дали условието $x_2 \geq 0$ е свободно или закрепено в задачата

$$z(\mathbf{x}) = 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 15x_5 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & \leq & 2, \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \leq & 1, \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5.$$

Решение. Двойствената задача

$$v(\boldsymbol{\pi}) = 2\pi_1 + \pi_2 \to \min,$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2\pi_1 & - & \pi_2 & \geq & 0, \\ \pi_1 & & & \geq & 3, \\ \pi_1 & + & \pi_2 & \geq & 6, \\ & & \pi_2 & \geq & 1, \\ -2\pi_1 & + & 3\pi_2 & \geq & -15, \end{array}$$

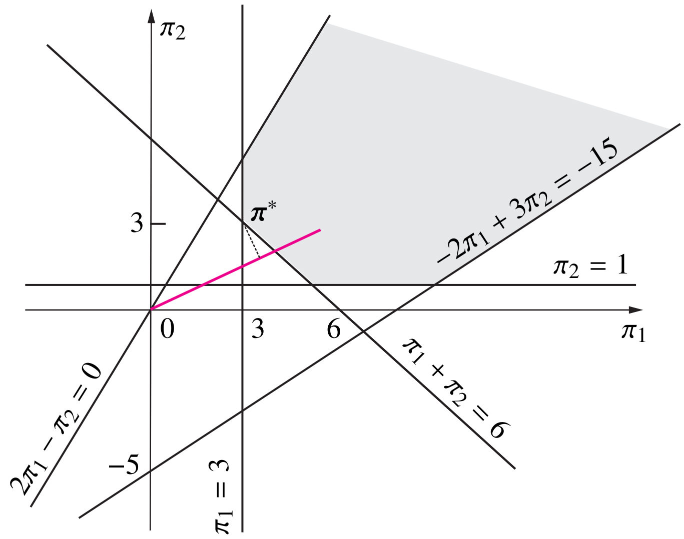
$$\pi_1 \geq 0, \ \pi_2 \geq 0$$

е с две променливи и може да бъде решена геометрично (фиг. 1). Тя има единствено оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^* = (3, 3)^{\mathrm{T}}$ и $v^* = 9$. Условието $x_2 \geq 0$ е спрегнато с условието $\pi_1 \geq 3$. Тъй като $\pi_1^* = 3$, условието $\pi_1 \geq 3$ е закрепено. Следователно условието $x_2 \geq 0$ е свободно.

4. Едновременно решаване на правата и двойствената задача със симплекс метода

Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално бдр на КЗЛО

$$\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



Фиг. 1

и $\mathbf{B}^{-1}$ е обратната на базисната му матрица. Тогава

$$\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} \tag{5}$$

е оптимално решение на двойствената на КЗ

$$\max v(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \le \mathbf{c}.$$

Обратната на текущата базисна матрица $\mathbf{B}^{-1}$ се намира там, където в първата симплексна таблица е била единичната матрица.

Да припомним, че относителните оценки се пресмятат по формулата $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}^*\mathbf{A}_j$. Нека j описват множеството на онези индекси, които са били базисни в началното бдр. Там съответните стълбове $\mathbf{A}_j$ са единични. Ако $\mathbf{A}_{j_i} = \mathbf{e}_i$, то $\bar{c}_{j_i} = c_{j_i} - \boldsymbol{\pi}^*\mathbf{e}_i = c_{j_i} - \pi_i^*$, откъдето

$$\pi_i^* = c_{j_i} - \bar{c}_{j_i}. \tag{6}$$

Пример 5. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1 - 2x_3 &\ge 3, \\ -x_1 + x_3 &\ge -2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Да се напише спрегнатата ѝ задача и да се намери нейно оптимално решение, като се използва симплексната таблица на намереното оптимално бдр на съответната канонична задача.

Решение. Решаването на задачата ще протече по следния начин:

1. Най-напред привеждаме задачата в каноничен вид и я решаваме с помощта на табличната форма на симплекс метода.

2. Написваме двойствената задача на каноничната задача и пресмятаме координатите на оптималното ѝ решение по някоя от формулите (5) или (6).

3. Написваме двойствената на дадената задача и я сравняваме с двойствената на КЗ. Между тези задачи *винаги* има връзка, защото са задачи с един и същи брой променливи. От установената връзка между двойствените задачи на дадената и на каноничната намираме оптималното решение на двойствената на дадената задача.

Канонизираме задача (7), като полагаме $x_3 = x_3^+ - x_3^-$

$$
\bar{z}(\bar{\mathbf{x}}) = -3x_1 - x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- \to \min,
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrl}
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3^+ & - & 3x_3^- & & & & = 1, \\
x_1 & & & - & 2x_3^+ & + & 2x_3^- & - & x_4 & & = 3, \\
x_1 & & & - & x_3^+ & + & x_3^- & & & + x_5 & = 2,
\end{array}
\tag{8}
$$

$$
x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0.
$$

Съответната M-задача е

$$
z_M(\mathbf{x}_M) = -3x_1 - x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- + Mx_6 \to \min,
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
x_1 & + & x_2 & + & 3x_3^+ & - & 3x_3^- & & & & & = 1, \\
x_1 & & & - & 2x_3^+ & + & 2x_3^- & - & x_4 & & + x_6 & = 3, \\
x_1 & & & - & x_3^+ & + & x_3^- & & & + x_5 & & = 2,
\end{array}
$$

$$
x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
$$

Последователните симплексни таблици са дадени в табл. 1–3. В таблици 2 и 3 стълбът x_6 продължава да участва, защото обратната базисна матрица на всяко бдр се намира в стълбовете, образуващи началния базис. В нашия случай началният базис е $[x_2, x_6, x_5]$ и съответните стълбове в табл. 3

съдържат елементите на обратната базисна матрица

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Таблица 1

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	1	1	3	-3	0	0	0	1
x_6	M	1	0	-2	$\boxed{2}$	-1	0	1	3
x_5	0	1	0	-1	1	0	1	0	2
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M-2$	0	$2M+1$	$-2M-1$	M	0	0	$-3M+1$

Таблица 2

$\mathbf{x}_M^{(1)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	$5/2$	1	0	0	$-3/2$	0	$3/2$	$11/2$
x_3^-	2	$1/2$	0	-1	1	$-1/2$	0	$1/2$	$3/2$
x_5	0	$\boxed{1/2}$	0	0	0	$1/2$	1	$-1/2$	$1/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		$-3/2$	0	0	0	$-1/2$	0	$M+1/2$	$5/2$

Таблица 3

$\mathbf{x}_M^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5	4	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	1	1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2	-1	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	3	$M-1$	4

на оптималното решение $\mathbf{x}_M^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, съответно на оптималното решение $\overline{\mathbf{x}}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ на каноничната задача (8).

Оптималното решение на изходната задача е $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$ и $z^* = -\overline{z}^* = 4$.

Двойствената задача на каноничната задача (8) е

$$
\begin{aligned}
&v(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 + 3\pi_2 + 2\pi_3 \to \max,\\
&\quad \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \le -3,\\
&\quad \pi_1 \le -1,\\
&\left.\begin{aligned} 3\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 &\le -2,\\ -3\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 &\le 2, \end{aligned}\right\} \iff -3\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 = 2,\\
&\quad -\pi_2 \le 0,\\
&\quad \pi_3 \le 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

От табл. 3 може да се намери оптималното решение $\boldsymbol{\pi}^*$ (формула (5))

$$
\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = (-1, 2, -3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.
$$

Двойствената задача на изходната задача (7) (второто и третото ограничение в (7) са умножени предварително с -1) е

$$
\begin{aligned}
&w(\mathbf{y}) = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \to \min,\\
&y_1 - y_2 + y_3 \ge 3,\\
&y_1 \ge 1,\\
&3y_1 + 2y_2 - y_3 = 2,\\
&y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Непосредствено се проверява, че задачи (9) и (10) са еквивалентни при смяна на променливите

$$
y_1 = -\pi_1, \quad y_2 = \pi_2, \quad y_3 = -\pi_3.
$$

Следователно $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = (1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на двойствената задача (10) и $v(\mathbf{y}_{\text{и}}^*) = z(\mathbf{x}_{\text{и}}^*) = 4$.

Задачи

1. За всяка от дадените задачи да се напише спрегнатата ѝ задача:

1.1. $x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\ge 1,\\ x_1 - x_2 - x_3 &\le 2,\\ x_2 &\le 0,\\ x_1 \ge 0,\ x_3 &\ge 0; \end{aligned}$$

1.2. $x_1 + 4x_4 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &\le 4,\\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\ge 3,\\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\ge 5,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

1.3. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i, && i = 1, \dots, m,\\ x_j &\ge 0, && j = 1, \dots, n+m; \end{aligned}$$

1.4. $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$;

1.5. $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$;

1.6. $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \le \mathbf{0}\}$;

1.7. $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \le \mathbf{0}\}$;

1.8. $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \le \mathbf{0}\}$.

2. Да се даде пример за двойка спрегнати задачи:

а) всяка от които няма допустими точки;

б) едната има допустими точки, а другата няма.

3. Като се използват теоремите за двойственост, да се провери дали дадените вектори $\bar{\mathbf{x}}$ са оптимални решения на съответните задачи:

3.1. $2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 2,\\ x_2 &\le 4,\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0;\\ \bar{\mathbf{x}} &= (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.2. $x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} 4x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= 7,\\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0,\\ x_j \ge 0,\ j &= 1, 2, 3,\\ \bar{\mathbf{x}} &= (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.3. $5x_1 + 54x_2 + 9x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} 9x_2 &\ge 9,\\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\ge 5,\\ 4x_2 + x_3 &= 5,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0,\\ \bar{\mathbf{x}} &= (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.4. $16x_1 + 4x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\ge 2,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 1,\\ x_2 - 3x_3 &\ge 4,\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\ge -6,\\ x_1 &\ge 0,\\ \bar{\mathbf{x}} &= (0, -2, -2)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.5. $x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 3, \\ x_1 & & & & & \geq & 1, \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2, \end{array}$$

$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)^{\mathrm{T}};$$

3.6. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -3, \\ x_1 & & & & & + & 3x_4 & = & 12, \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}};$$

3.7. $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 15, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 22, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (3, 4, 5, 0)^{\mathrm{T}};$$

3.8. $2x_1 - x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 5, \\ 2x_1 & & & - & x_3 & \leq & 6, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & \geq & 4, \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\tfrac{16}{5}, -\tfrac{37}{5}, \tfrac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}.$$

4. Като се използват теоремите за двойственост, да се решат задачите:

4.1. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6, \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 8, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.2. $z(\mathbf{x}) = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & \leq & -3, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 3, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4;$$

4.3. $z(\mathbf{x}) = -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2, \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.5. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.6. $z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -2, \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & \geq & 1, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

5. В следващите задачи да се провери дали условието $x_1 \geq 0$ е свободно:

5.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 14, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3; \end{aligned}$$

5.2. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 3a, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 &= 2a, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

6. Да се решат с помощта на симплекс-метода дадените задачи. За всяка разрешима задача да се напише двойствената ѝ задача и да се пресметне оптималното ѝ решение, като се използва някоя от формулите (5) или (6):

6.1. $z(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= -5, \\ x_2 &\leq 6, \\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.2. $z(\mathbf{x}) = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq -3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.3. $z(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_2 &\leq 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3; \end{aligned}$$

6.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.5. $z(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_3 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_3 &\geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.6. $z(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -5, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

7. Да се намери минималната стойност на функцията $z(\mathbf{x})$:

7.1.
$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}) &= x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_i &\geq i, \qquad i = 1, \ldots, n, \\ x_j &\geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n; \end{aligned}$$

7.2.
$$\begin{aligned} &z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}, \\ &x_i + x_{i+1} \geq \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, 99, \\ &x_1 + x_{100} \geq \alpha_{100}; \end{aligned}$$

7.3. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3,$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &\geq \mu_1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &\geq \mu_2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &\geq \mu_3; \end{aligned}$$

7.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3,$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &\geq \mu, \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 &\geq \mu, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &\geq \mu. \end{aligned}$$

8. Да се докаже, че задачите

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_b\}, & P_b = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \\ \text{II.} & \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_d\}, & P_d = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{array}$$

са едновременно разрешими и неразрешими, ако:

а) $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$;

б) $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$, $P_b \neq \emptyset$, $P_d \neq \emptyset$.

9. Нека $\max\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P\}$ и $\min\{v(\boldsymbol{\pi}) : \boldsymbol{\pi} \in Q\}$ са двойка спрегнати задачи. Кои от следните случаи са възможни:

а) $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ и съществуват $\mathbf{x}^* \in P$, $\boldsymbol{\pi}^* \in Q$, за които $z(\mathbf{x}^*) = v(\boldsymbol{\pi}^*)$;

б) $P \neq \emptyset$ и $v(\boldsymbol{\pi})$ е неограничена отдолу в Q;

в) $z(\mathbf{x})$ и $v(\boldsymbol{\pi})$ са неограничени съответно отгоре в P и отдолу в Q;

г) $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$.

10. Задачата $(P, z) : \max\{z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$, $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е разрешима.

а) Може ли $z(\mathbf{x})$ да бъде неограничена отгоре в множеството $\widetilde{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{d} \neq \mathbf{b}$?

б) Може ли $\widetilde{P} \neq \emptyset$?

в) Може ли $\tilde{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ да бъде неограничена отгоре в P, ако $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$?

г) Какво трябва да бъде множеството P, за да бъде задачата

$$\max(\min)\ \{\widetilde{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$$

разрешима за всяко $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$?

11. Нека $\mathbf{x}'$, $\boldsymbol{\pi}'$ и $\mathbf{x}''$, $\boldsymbol{\pi}''$ са съответни оптимални решения на двойките спрегнати задачи

$$\max\{\mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}'\}$$

и

$$\max\{\mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}''\}.$$

Докажете, че $(\mathbf{c}'' - \mathbf{c}')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\pi}'' - \boldsymbol{\pi}') \leq (\mathbf{c}'' - \mathbf{c}')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}''$.

12. Нека $\mathbf{x}'$, $\boldsymbol{\pi}'$ и $\mathbf{x}''$, $\boldsymbol{\pi}''$ са съответни оптимални решения на двойките спрегнати задачи

$$\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}',\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}$$

и

$$\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}'',\ \mathbf{x} \geq 0\}, \qquad \min\{\mathbf{b}''\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}.$$

Докажете, че $\boldsymbol{\pi}''^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}'' - \mathbf{b}') \leq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \leq \boldsymbol{\pi}'^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}'' - \mathbf{b}')$.

13. Да се докаже, че от двете системи I и II само едната има решение ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$):

13.1. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > 0$; II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{c}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$;

13.2. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{0}$, II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{0}$;

13.3. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$, $\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{0}$;

13.4. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$, II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c}\boldsymbol{\pi} = 1$.

Отговори и решения

1.1. $$\begin{aligned} &-\pi_1 + 2\pi_2 \to \min,\\ &-\pi_1 + \pi_2 \geq 1,\\ &-\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 = 10,\\ &-\pi_1 - \pi_2 \geq -1,\\ &\pi_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \end{aligned}$$

1.2. $$\begin{aligned} &-4\pi_1 + 3\pi_2 + 5\pi_3 \to \max,\\ &\pi_2 + \pi_3 \leq 1,\\ &-\pi_1 - \pi_2 - \pi_3 \leq 0,\\ &-\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 = 0,\\ &\pi_2 = 4,\\ &\pi_i \geq 0,\ i = 1,2,3. \end{aligned}$$

1.3. $$\begin{aligned} &b_1\pi_1 + \cdots + b_m\pi_m \to \min,\\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq c_j, \quad j = 1,\ldots,n,\\ &\pi_i \geq -M,\ i = 1,\ldots,m. \end{aligned}$$

1.4. $\max\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\}$.

1.5. $\min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq -\mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$.

1.6. На $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}) : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\max\{-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\} \iff \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\}.$$

1.7. На $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}) : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \geq -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\max\{-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\} \iff \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq 0\}.$$

1.8. На $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}) : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\min\{-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\} \iff \max\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}.$$

2. а) Например

$$\begin{array}{ll} 5x_1 + x_2 \to \max, & \pi_1 - 2\pi_2 \to \min,\\ x_1 - x_2 \leq 1, & \pi_1 - \pi_2 \geq 5,\\ -x_1 + x_2 \leq -2, & -\pi_1 + \pi_2 \geq 1,\\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, & \pi_1 \geq 0,\ \pi_2 \geq 0. \end{array}$$

б) Достатъчно е да се вземе ЗЛО, чиято функция е неограничена отгоре (или отдолу) в допустимото ѝ множество (Теорема 1(б)).

3.1. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 0, 3)^{\mathrm{T}}$.

3.2. Не.

3.3. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (2, 0, 9)^{\mathrm{T}}$.

3.4. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$.

3.5. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$.

3.6. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 0, 6)^{\mathrm{T}}$.

3.7. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{10}{13}\right)^{\mathrm{T}}$.

3.8. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

4.1. $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

4.2. $\boldsymbol{\pi}^* = (6, 6)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{9}{17}, \frac{15}{17}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

4.3. $\boldsymbol{\pi}^* = (6, 2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = (0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

4.4. $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

4.5. $\boldsymbol{\pi}^* = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

4.6. Няма решение.

5.1. Да.

5.2. При $a > 0$ — свободно, при $a = 0$ — закрепено, при $a < 0$ — допустимото множество е празно.

6.1. $z^* = -\frac{19}{2}$, $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. За M-задачата: начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6 и x_7 изкуствени променливи. Оптимални решения: $\mathbf{x}^*_M$ от табл. 4, на КЗ $\mathbf{x}^*_K = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$ (използвайте формула (6): $\pi_1 = c_6 - \overline{c}_6 = M - \left(M - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = c_7 - \overline{c}_7 = M - \left(M - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $\pi_3 = c_5 - \overline{c}_5 = 0$). Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{-4_1 - 5y_2 + 6y_3 : y_1 - y_2 = -1, -y_1 - y_2 + y_3 \geq -2, 2y_1 + y_2 \geq -1, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = \pi_2$, $y_3 = -\pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 4

$\mathbf{x}^*_M; \mathbf{x}^*_K$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_1^-	x_3	x_4	x_6	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-1	1	0	M	M	0
x_2	2	0	-1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$9/2$
x_1^+	1	-1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_5	0	0	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$5/2$	$1/2$	$M-1/2$	$M-3/2$	$-19/2$

6.2. $z^* = -22$, $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (3,0,-2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = (2,0,8)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. За M-задачата начален базис $\{x_3^+, x_4, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: $\mathbf{x}^*_M$ от табл. 5, на КЗ $\mathbf{x}^*_K = (3,0,0,2,1,0)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = (-2,0,8)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{y_1 + 4y_2 - 3y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \geq -6,\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 4,\ y_1 = 2,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = -\pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = \pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 5

$\mathbf{x}^*_M; \mathbf{x}^*_K$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2	x_3^+	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-4	-2	0	M	0
x_1	6	-2	0	-1	1	3
x_4	0	1	0	1	-1	1
x_3^-	2	-5	-1	-1	1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		18	0	8	$M-8$	-22

6.3. $z^* = \frac{11}{2}$, $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = \left(\frac{1}{2},2,2\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = \left(\frac{3}{2},\frac{9}{2},-1\right)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5. За M-задачата начален базис $\{x_6, x_5, x_3\}$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: $\mathbf{x}^*_M$ от табл. 6, на КЗ $\mathbf{x}^*_K = \left(\frac{1}{2},2,2,0,0\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{3}{2},-\frac{9}{2},-1\right)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{-3y_1 + 2y_2 - y_3 : -2y_1 - 2y_3 \geq -1,\ -y_1 + y_2 + y_3 \geq 2,\ -y_3 \geq 1,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = \pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 6

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K^*$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		0	0	M	0
x_1	1	−1/2	−1/2	1/2	1/2
x_2	−2	0	1	0	2
x_3	−1	1	2	−1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		3/2	9/2	$M-3/2$	11/2

6.4. $z^* = 6$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (2, -4, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. За M-задачата начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6, x_7 изкуствени променливи. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^*$ от табл. 7, на КЗ $\mathbf{x}_K^* = (2, 0, 4, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{6y_1 - 2y_2 - 4y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \le 1, -y_1 + y_2 = -1, y_2 \le 1, y_1 \ge 0, y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = -\pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 7

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K^*$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2^+	x_3	x_4	x_6	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		1	1	0	M	M	0
x_1	1	0	1/2	−1/2	1/2	−1/2	2
x_2^-	1	−1	−1/2	−1/2	1/2	1/2	4
x_5	0	0	−1/2	1/2	−1/2	1/2	2
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	1	$M-1$	M	−6

6.5. $z^* = -\frac{67}{5}$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = \left(\frac{16}{5}, -\frac{37}{5}, \frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. За M-задачата начален базис $\{x_2^-, x_4, x_6\}$. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^*$ от табл. 8, на КЗ $\mathbf{x}_K^* = \left(\frac{16}{5}, 0, \frac{37}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = \left(-1, -\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{-5y_1 - 6y_2 + 4y_3 : y_1 - 2y_2 + y_3 \le -2, y_1 = 1, -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = -\pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = \pi_3$ тя съвпада с двойнствената на КЗ.

Таблица 8

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2^+	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		1	0	0	M	0
x_2^-	-1	-1	$4/5$	$3/5$	$-3/5$	$37/5$
x_1	-2	0	$2/5$	$-1/5$	$1/5$	$16/5$
x_3	1	0	$-1/5$	$-2/5$	$2/5$	$2/5$
$\bar{\mathbf{c}}$		0	$9/5$	$3/5$	$M-3/5$	$67/5$

6.6. $z^* = 6$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. За M-задачата начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6, x_7 изкуствени променливи. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^*$ от табл. 9, на КЗ $\mathbf{x}_K^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0, 0, \frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{6y_1 - 5y_2 - 4y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \le 1,\ -y_1 + y_2 = -1,\ y_2 \le 1,\ y_1 \ge 0,\ y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = -\pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 9

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K^*$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2^+	x_3	x_4	x_6	x_7	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-1	1	0	M	M	0
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2^-	1	-1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$11/2$
x_5	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$7/2$
$\bar{\mathbf{c}}$		0	1	1	$M-1$	M	-6

7.1. $z^* = n$. Спрегнатата задача е

$$\max v(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 + 2\pi_2 + \cdots + n\pi_n,\ \pi_i + \pi_{i+1} + \cdots + \pi_n \le i,\ \pi_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n.$$

От

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n \le 1, \quad \pi_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{11}$$

следват останалите ограничения, т. е. допустимото множество се определя от (11). То е компактно и оптимално бдр е $\boldsymbol{\pi}^* = (0,0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = v(\boldsymbol{\pi}^*) = n$.

7.2. Двойствената задача е $\max v(\boldsymbol{\pi}) = \alpha_1\pi_1 + \cdots + \alpha_{100}\pi_{100}$, $\pi_i + \pi_{i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, 99$, $\pi_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 100$. От уравненията следва, че $\pi_i = 1 - \pi_1$, $i = 2, \ldots, 100$, $\pi_i = \pi_1$, $i = 1, 3, \ldots, 99$, и $0 \leq \pi_1 \leq 1$. Следователно $v(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i-1}\pi_1 + \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i}(1 - \pi_1) = \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i} + \pi_1 \sum_{i=1}^{50} (\alpha_{2i-1} - \alpha_i)$ и

$$z^* = \begin{cases} \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i-1} & \text{при } \sum_{i=1}^{50} (\alpha_{2i-1} - \alpha_i) \geq 0 \quad (\pi_1 = 1), \\ \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i} & \text{в противен случай} \quad (\pi_1 = 0). \end{cases}$$

7.3. $z^* = \dfrac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{\lambda + 2}$ при $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$; $z^* = \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ при $\lambda = 1$; $z^* = -\infty$ при $\lambda = -2$. Спрегнатата задача е $\max \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \mu_3\pi_3$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$; $\det \mathbf{A} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. При $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ оптимално решение е $\boldsymbol{\pi}^* = \frac{1}{\lambda+2}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. При $\lambda = 1$ допустимото множество $\{\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) : \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1,\ \pi_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3\}$ е компактно с върхове $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. При $\lambda = -2$ задачата няма допустими точки и понеже допустимото множество на изходната задача не е празно, то $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него.

7.4. $z^* = \dfrac{\lambda\mu(\lambda^2 + \lambda + 1)}{\lambda(3 - \lambda)}$ при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$; $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 3$. Спрегнатата задача е $\max \mu(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, \lambda, \lambda^2)^{\mathrm{T}}$; $\det \mathbf{A} = -\lambda^2(\lambda - 3)$. При $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$ оптимално решение е $\boldsymbol{\pi}^* = \frac{1}{\lambda(3-\lambda)}(\lambda^2 + 2\lambda - 2, \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1, 2\lambda^2 - 2\lambda + 1)^{\mathrm{T}}$. При $\lambda = 0$ или $\lambda = 3$ задачата няма допустими точки и понеже допустимото множество на изходната задача не е празно, то $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него.

8. Съответните спрегнати задачи имат общо допустимо множество $Q = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$.

а) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in P_b \neq \emptyset$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in P_d \neq \emptyset$. Нека задача I е разрешима. Тогава и спрегнатата ѝ задача е разрешима, т. е. $Q \neq \emptyset$. Ако допуснем, че задача II е неразрешима, то $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ е неограничена в P_d ($P_d \neq \emptyset$), откъдето (Теорема 1(б)) стигаме до противоречието $Q = \emptyset$. Ако задача I е неразрешима и допуснем, че задача II има решение, ще стигнем до същото противоречие.

б) Нека задача I е разрешима, тогава $Q \neq \emptyset$ и ако допуснем, че задача II няма решение, то $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ е неограничена в P_d ($P_d \neq \emptyset$), т. е. стигаме (Теорема 1(б)) до противоречието $Q = \emptyset$. Аналогично се доказва и случаят за неразрешимост.

9. а) Да. б) Не (Теорема 1(б)). в) Не (Теорема 1(б)). г) Да.

10. а) Не. Спрегнатите задачи на задачите (P, z) и $(P, \tilde{z})$ имат общо допустимо множество $Q = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}$; $Q \neq \emptyset$, защото задача (P, z) е разрешима. Ако допуснем, че задача $(P, \tilde{z})$ е неразрешима, то $\tilde{z} \to +\infty$ в $\widetilde{P}$ ($\widetilde{P} \neq \emptyset$) и стигаме до противоречието $Q = \emptyset$.

б) Да. При $\operatorname{rank}\mathbf{A} \neq \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{d})$.

в) Да, ако P е неограничено. Тогава е достатъчно $\mathbf{c}$ да бъде неотрицателна линейна комбинация на направляващи вектори на неограничени ръбове на P.

г) Ограничено.

11. Двете изходни задачи имат общо допустимо множество, двете спрегнати задачи — също. Следователно

$$\begin{array}{llcl}
 & \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' \leq \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}', & & \mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' \leq \mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'', \\
 & \mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' & \text{и} & \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}', \\
\text{т. е.} & (\mathbf{c}' - \mathbf{c}'')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' \leq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi}'') & \text{и} & (\mathbf{c}'' - \mathbf{c}')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\pi}'' - \boldsymbol{\pi}'),
\end{array}$$

откъдето следва твърдението.

12. Понеже двойките спрегнати задачи имат общо допустимо множество, то

$$\begin{array}{llcl}
 & \mathbf{b}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' \geq \mathbf{b}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}', & & \mathbf{b}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' \geq \mathbf{b}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'', \\
 & \mathbf{b}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' & \text{и} & \mathbf{b}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}', \\
\text{т. е.} & (\mathbf{b}' - \mathbf{b}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') & \text{и} & (\mathbf{b}'' - \mathbf{b}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}',
\end{array}$$

откъдето следва твърдението.

13.1. Образуваме спрегнатите задачи: $\mathrm{I^a}$: $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ и $\mathrm{II^a}$: $\min\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi} \in P_2\}$, $P_2 = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Ако допуснем, че задача $\mathrm{I^a}$ има оптимално решение $\mathbf{x}^*$, то задача $\mathrm{II^a}$ има оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^*$ и $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* = 0$, което е противоречие. Следователно задача $\mathrm{I^a}$ е неразрешима, откъдето и двойствената ѝ задача $\mathrm{II^a}$ е неразрешима поради $P_2 = \emptyset$, т. е. системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Ако допуснем, че задача II^{a} има оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^*$, то и задача I^{a} има оптимално решение $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \le \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* = 0$, т. е. системата I няма решение.

13.2. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a}: $\max\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{0}\}$ и II^{a}: $\min\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi} \in P_2\}$, $P_2 = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\pi} \ge \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Понеже $P_1 \ne \emptyset$, то в задача I^{a} всички допустими точки са оптимални решения. Следователно ограниченията $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{0}$ са свободни, откъдето $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$, т. е. системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Понеже $P_2 \ne \emptyset$ и $\boldsymbol{\pi} \ne \mathbf{0}$, то има поне едно закрепено ограничение в P_2, т. е. системата I няма решение.

13.3. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a}: $\min\{-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ и II^{a}: $\max\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\pi}) : -\boldsymbol{\pi} \in P_2\}$, $P_2 = \{-\boldsymbol{\pi} : -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \le -\mathbf{c},\ -\boldsymbol{\pi} \ge \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Ако допуснем, че задача I^{a} е разрешима, то и задача II^{a} е разрешима и $0 = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\pi}) \le -\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} < 0$, което е противоречие. Следователно задача I^{a} няма оптимално решение поради неограниченост отдолу на $-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ ($P_1 \ne \emptyset$), откъдето задача II^{a} е неразрешима поради $P_2 = \emptyset$, т. е. системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Ако допуснем, че задача II^{a} има оптимално решение, то и задача I^{a} е разрешима и $\min\{-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\} = \max\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\pi}) : -\boldsymbol{\pi} \in P_2\} = 0$, т. е. системата I няма решение.

13.4. Образуваме дуалните задачи: I^{a}: $\min\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}\}$ и II^{a}: $\max\{v(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Тогава задача I^{a}, съответно II^{a}, имат оптимални решения и $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \le \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0 < 1$. Следователно системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Ако допуснем, че задача II^{a}, съответно I^{a}, са разрешими, то съществува допустима точка за задача II^{a}, за която $v = 1$, докато стойността на целевата функция на задача I^{a} е равна на нула за всяка нейна допустима точка, което е противоречие. Следователно задача II^{a} е неразрешима поради неограничена целева функция (допустимото ѝ множество съдържа нулевия вектор), откъдето следва, че допустимото множество на задача I^{a} е празно, т. е. системата I няма решение.

Упражнение 11–13

Класическа транспортна задача

Класическата транспортна задача (КТЗ) е специален случай на задачата на линейното оптимиране. Тя е една от първите ЗЛО. Формулирана е от американеца Хичкок през 1939 г. КТЗ представлява самостоятелен интерес поради специфичните свойства, които притежава. Решаването на КТЗ със симплекс метода е свързано с голяма изчислителна работа. Затова са разработени специални методи за нейното решаване.

1. Икономически и математически модел

1.1. Икономически модел

Даден вид продукт е произведен в пунктовете $A_1, \ldots, A_m$ (наричани *производители*, *доставчици*, *складове*) съответно в количества $a_1, \ldots, a_m$. Пунктовете $B_1, \ldots, B_n$ (наричани *потребители*, *магазини*) се нуждаят от този продукт в количества съответно $b_1, \ldots, b_n$, като

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Транспортните разходи за превоз на единица продукт от пункта A_i до пункта B_j са съответно c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Задачата е: да се направи план за снабдяването на пунктовете B_j, $j = 1, \ldots, n$, така че потребностите им да бъдат изцяло задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

1.2. Математически модел

Да означим с x_{ij} количеството продукт, с което пунктът A_i, $i = 1, \ldots, m$, снабдява пункта B_j, $j = 1, \ldots, n$. При план на снабдяване $\mathbf{x} = (x_{11}, \ldots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$ целевата функция е

$$z(x_{11}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{2}$$

а условията (транспортните ограничения) са

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n. \tag{5}$$

1.3. Транспортни задачи от отворен тип

В практиката много по-често се срещат транспортни задачи, при които баланс между производство и потребление няма. Те се наричат *транспортни задачи от отворен тип*. За решаването им е необходимо изкуствено да бъде създаден баланс.

Случай I.

Производството е по-голямо от потреблението (има икономически смисъл):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

За да има баланс, се въвежда *фиктивен потребител* B_{n+1} с потребност

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и транспортни разходи от всеки производител до него съответно $c_{i,n+1} = 0$, $i = 1, \dots, m$. След получаването на оптималното решение количествата продукт, предназначени за фиктивния потребител, просто остават у съответните производители. Математическият модел на КТЗ се променя, като ограниченията (3) стават от вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Добавянето на допълнителни променливи в лявата страна на тези ограничения е еквивалентно на въвеждането на фиктивен потребител.

Случай II.

Потреблението е по-голямо от производството:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Постъпва се аналогично: въвежда се *фиктивен производител* A_{m+1} с производство

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

и транспортни разходи до всеки потребител съответно $c_{m+1,j} = 0$, $j = 1, \dots, n$. В този случай във формулировката на транспортната задача се премахва изискването потребностите на потребителите да бъдат изцяло задоволени, тъй като това би довело до несъвместими ограничения. Вместо него се иска цялата продукция да бъде превозена при минимални транспортни разходи. Математическият модел на КТЗ се променя, като ограниченията (4) стават от вида

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Добавянето на допълнителни променливи в лявата страна на тези ограничения е еквивалентно на въвеждането на фиктивен производител. След получаването на оптималното решение количествата продукт, които трябва да бъдат доставени от фиктивния производител на съответните потребители, просто остават у него и не се превозват.

2. Основни свойства на КТЗ

Без ограничение на общността предполагаме, че $a_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, $b_j > 0$, $j = 1, \dots, n$ (иначе намаляваме броя на производителите или потребителите, а съответните променливи на задачата са равни на нула).

КТЗ (2)–(5) очевидно е КЗЛО и може да се запише във вида $\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, където $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nm}$, $\mathbf{A}$ е матрица $(m+n)\times mn$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m+n}$, $\mathbf{d} = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}}$. Един допустим вектор $\mathbf{x} = (x_{11}, \dots, x_{mn})^{\mathrm{T}}$ понякога се записва като матрица $\mathbf{X}$ с елементи x_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, която се нарича *матрица на превозите*. Аналогично се определя и *матрица на транспортните разходи* $\mathbf{C}$, чиито елементи са c_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Теорема 1. Задача (2)–(5) има оптимално решение тогава и само тогава, когато е налице *условието за баланс* (1).

Матрицата **A** се състои от нули и единици, като във всеки стълб има точно два ненулеви елемента, защото променливата x_{ij} участва с коефициент 1 само в две ограничения — i-тото и $m + j$-тото.

Теорема 2. Рангът на матрицата **A** е равен на $m + n - 1$.

3. Транспортна таблица. Основни понятия

При различните методи за решаване на КТЗ се използват правоъгълни таблици и някои понятия, свързани с тях. Правоъгълната таблица има редове и стълбове, образуващи клетки. Всяка клетка се определя с наредена двойка индекси (i, j), където i е номерът на реда, а j — номерът на стълба, в който се намира клетката. Тогава има взаимноеднозначно съответствие между координатите на едно допустимо решение на КТЗ и клетките на тази таблица, като на координатата x_{ij} съответства клетката (i, j).

Всички данни за дадено бдр на КТЗ могат да бъдат подредени в правоъгълна таблица (наричана *транспортна таблица*), както е показано на табл. 1.

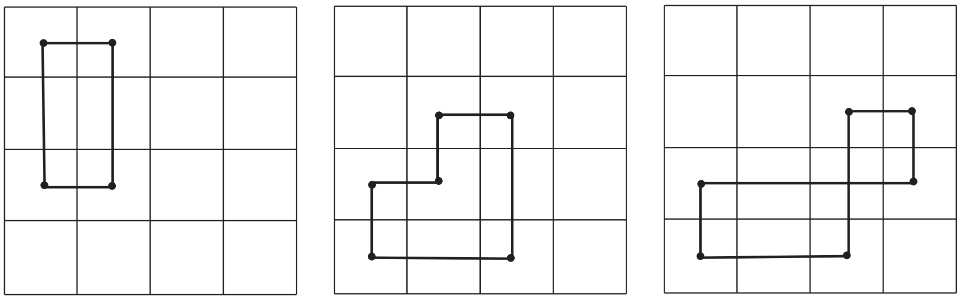
Таблица 1

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1n} x_{1n}	a_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	....	$\vdots$	$\vdots$
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	....	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_1	b_2	....	b_n	a b

Ако за дадено бдр $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m,n}$ координатата x_{ij} е базисна, клетката (i, j) също ще наричаме *базисна* (или *пълна*, тъй като там се записва съответната стойност на x_{ij}). Ако x_{ij} е небазисна, клетката (i, j) ще наричаме *небазисна* (или *празна*, защото там не се записва никаква стойност).

Определение 1. Съвкупност от клетки на транспортната таблица се нарича *цикъл*, ако начупената линия, образувана от отсечки с върхове в тези клетки, е затворена и от всеки две отсечки с общ връх едната лежи в ред, а другата — в стълб на транспортната таблица. Съвкупност от клетки в транспортната таблица, която съдържа цикъл, се нарича *циклична*. В противен случай се нарича *ациклична*.

От горното определение следва, че всеки цикъл се състои от четен брой клетки. Във всеки цикъл две последователни (съседни) клетки имат равни първи или втори индекси, т. е. съседните клетки лежат в един и същи ред или стълб на транспортната таблица. Примери на цикли са дадени на фиг. 1.



Фиг. 1. Цикли. Върховете (клетките) на цикъла са означени с черни точки

Теорема 3. Необходимо и достатъчно условие произволна съвкупност от вектор-стълбове на матрицата на транспортните ограничения да бъде линейно независима е съответните ѝ клетки в транспортната таблица да не съдържат цикъл.

Теорема 4. Необходимо и достатъчно условие допустимият вектор $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m,n}$ да бъде бдр за КТЗ е клетките (i, j), за които $x_{ij} > 0$, да не съдържат цикъл.

Теорема 5. Нека $\mathbf{x} = \{x_{ij}\}_{m,n}$ е бдр за КТЗ. За всяка празна клетка (i, j) съществува точно един цикъл, който я свързва с базисните (пълните) клетки на $\mathbf{x}$.

4. Намиране на начално бдр

Първа стъпка при решаване на КТЗ е построяването на начално бдр. За разлика от каноничната задача на линейното оптимиране при транспортната задача това се осъществява лесно. Има различни методи за построяване на начално бдр. Спираме се на два от тях — *метод на северозападния ъгъл* и *метод на минималния елемент*.

4.1. Метод на северозападния ъгъл

Определяме $\min\{a_1, b_1\}$.

- Ако $\min\{a_1, b_1\} = a_1$, полагаме $x_{11} = a_1$, $x_{1j} = 0$, $j = 2, \dots, n$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия ред и коригиране на b_1: $b'_1 = b_1 - a_1$.

- Ако $\min\{a_1, b_1\} = b_1$, полагаме $x_{11} = b_1$, $x_{i1} = 0$, $i = 2, \dots, m$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на първия стълб и коригиране на a_1: $a'_1 = a_1 - b_1$.

- Ако $a_1 = b_1$, отстраняваме или първия стълб, или първия ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b'_1 = 0$, или $a'_1 = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр.

С получената таблица, която има един размер по-малко от предишната, повтаряме описаните по-горе процедури. Така след точно $m + n - 1$ стъпки стигаме до таблица, състояща се от една клетка (или таблица с един ред и един стълб). В този случай двете количества a'_1 и b'_1 са равни и чак сега се елиминират и ред, и стълб. Пълните клетки в транспортната таблица са точно $m + n - 1$ и освен това образуват ациклична съвкупност, т. е. в тях се намират базисните координати на полученото бдр.

Наименованието на метода идва от това, че x_{11} е разположена в „северозападната“ клетка на таблицата.

4.2. Метод на минималния елемент

Намираме $c_{i_0 j_0} = \min\limits_{i,j} c_{ij}$. След това определяме $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$.

- Ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = a_{i_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = a_{i_0}$, $x_{i_0 j} = 0$, $j \neq j_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на реда i_0 и коригиране на b_{j_0}: $b'_{j_0} = b_{j_0} - a_{i_0}$.

- Ако $\min\{a_{i_0}, b_{j_0}\} = b_{j_0}$, полагаме $x_{i_0 j_0} = b_{j_0}$, $x_{i j_0} = 0$, $i \neq i_0$. Преминаваме към нова транспортна таблица, получена от старата чрез отстраняване на стълба j_0 и коригиране на a_{i_0}: $a'_{i_0} = a_{i_0} - b_{j_0}$.

- Ако $a_{i_0} = b_{j_0}$, отстраняваме или j_0-я стълб, или i_0-я ред, но само единия от тях и след направената корекция се получава или $b'_{j_0} = 0$, или $a'_{i_0} = 0$. Това нулево количество участва пълноправно по-нататък. В този случай винаги се получава изродено бдр.

С получената таблица повтаряме описаните процедури, както в метода на северозападния ъгъл.

Пример 1. Да се приложат

а) методът на северозападния ъгъл

б) методът на минималния елемент

за намиране на бдр на транспортната задача, зададена с табл. 2.

Таблица 2

$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	100
$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	130
$\boxed{5}$	$\boxed{8}$	$\boxed{12}$	$\boxed{7}$	170
150	120	80	50	

Решение. Намирането на начално бдр по метода на северо-западния ъгъл е илюстрирано с табл. 3. Редът за отстраняване на редове (респ. стълбове) при получаване на редуцираните таблици е означен отляво (за редовете) и отгоре (за стълбовете) на таблицата с римски цифри. Транспортните разходи за намереното бдр са 2300.

Таблица 3

	II	IV	V	VI	
I	100 $\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~100~~
III	50 $\boxed{1}$	80 $\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	~~130~~ ~~80~~
VI	$\boxed{5}$	40 $\boxed{8}$	80 $\boxed{12}$	50 $\boxed{7}$	~~170~~ ~~130~~ ~~50~~
	~~150~~ ~~50~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	

Намирането на бдр на същата задача по метода на минималния елемент е илюстрирано на табл. 4. Транспортните разходи за това бдр са 2220. По-късно ще видим, че за оптималното решение те са 2040.

Таблица 4

	II	V	VI	IV	
III	20 $\boxed{3}$	80 $\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	~~100~~ ~~80~~
I	130 $\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$	~~130~~
VI	$\boxed{5}$	40 $\boxed{8}$	80 $\boxed{12}$	50 $\boxed{7}$	~~170~~ ~~120~~ ~~80~~
	~~150~~ ~~20~~	~~120~~ ~~40~~	~~80~~	~~50~~	

5. Разпределителен метод за решаване на КТЗ

Според теорема 1 условието за баланс е необходимо и достатъчно, за да има КТЗ оптимално решение. Така от алгоритъма на симплекс метода отпада критерият за неограниченост на целевата функция и остават само два елемента — критерий за оптималност и правило за преминаване от едно бдр към съседно на него, при което стойността на целевата функция се подобрява.

5.1. Критерий за оптималност

Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е бдр и (k, l) е празна клетка. Образуваме единствения цикъл γ_{kl}, който я свързва с клетките от базиса на $\overline{\mathbf{x}}$

$$\gamma_{kl} : (k, l)(k, j_1) \ldots (i_s, j_s)(i_s, l).$$

Клетките от цикъла маркираме алтернативно със знаци $+$ и $-$, започвайки от клетката (k, l) със знак $+$. Тогава относителната оценка на променливата x_{kl} е

$$\overline{c}_{kl} = \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{+}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^{-}} c_{ij},$$

където $\gamma_{kl}^{+} = \{(i, j) \in \gamma_{kl}$, означени с $+\}$, $\gamma_{kl}^{-} = \{(i, j) \in \gamma_{kl}$, означени с $-\}$.

Теорема 6. Бдр на задача (2)–(5) е оптимално тогава и само тогава, когато $\overline{c}_{kl} \geq 0$ за всички негови празни клетки (k, l).

Теорема 6 следва непосредствено от условията за оптималност на каноничната линейна задача.

5.2. Преминаване от едно бдр към съседно на него

Теорема 7. Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е бдр на задача (2)–(5). Тогава векторът $\overline{\mathbf{x}}'$, получен от $\overline{\mathbf{x}}$ по формулите

$$
\begin{aligned}
&\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij} + \overline{x}_{i_p j_p}, && (i, j) \in \gamma^{+}_{kl}, \\
&\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij} - \overline{x}_{i_p j_p}, && (i, j) \in \gamma^{-}_{kl}, \\
&\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij}, && (i, j) \notin \gamma_{kl}, \quad \overline{x}_{i_p j_p} = \min_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} \overline{x}_{ij},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

е бдр на задача (2)–(5), като $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{x}}'$ са съседни.

Теорема 7 следва непосредствено от формулите за преминаване от едно бдр на каноничната задача на линейното оптимиране към съседно на него.

5.3. Алгоритъм на разпределителния метод

Този метод е вариант на симплекс метода за решаване на каноничната задача на линейното оптимиране и може да се опише с помощта на следния алгоритъм:

1. Построяваме начално бдр $\overline{\mathbf{x}}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.

2. За всяка празна клетка (i, j) на $\overline{\mathbf{x}}$ построяваме цикъла γ_{ij} и пресмятаме $\overline{c}_{ij}$. Проверяваме критерия за оптималност (теорема 6). Ако той е изпълнен, то бдр е оптимално и задачата е решена. *Край.*

   Ако критерият за оптималност не е изпълнен, преминаваме към т. 3.

3. Намираме $\overline{c}_{i_0 j_0} = \min\{\overline{c}_{ij} : \overline{c}_{ij} < 0\}$. Построяваме ново бдр $\overline{\mathbf{x}}'$ по формулите (6) с помощта на цикъла $\gamma_{i_0 j_0}$, свързващ клетката (i_0, j_0) с базисните клетки на $\overline{\mathbf{x}}$. Преминаваме към т. 2, като вместо $\overline{\mathbf{x}}$ вземаме $\overline{\mathbf{x}}'$.

Пример 2. Да се приложи разпределителният метод за решаване на задачата, дадена с табл. 2.

Решение.

Итерация 0:

1. За начално бдр $\mathbf{x}^{(0)}$ използуваме намереното в табл. 3.

2. Проверяваме условията за оптималност. За целта пресмятаме относителните оценки на небазисните променливи (празните клетки). Това

извършваме по редове отляво надясно. Първата празна клетка при тази наредба е $(1,2)$. Нейният цикъл

$$\gamma_{12} : \underset{+}{(1,2)}\underset{-}{(2,2)}\underset{+}{(2,1)}\underset{-}{(1,1)}$$

е показан с пунктир на табл. 5. Така $\bar{c}_{12} = (5+1)-(4+3) = 6-7 = -1 < 0$.

Таблица 5

$\boxed{3}$ 100 $-$	$\boxed{5}$ $+$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$
$\boxed{1}$ 50 $+$	$\boxed{4}$ 80 $-$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$
$\boxed{5}$	$\boxed{8}$ 40	$\boxed{12}$ 80	$\boxed{7}$ 50

Следователно $\mathbf{x}^{(0)}$ не е оптимално бдр.

3. Тъй като проверката на критерия за оптималност при разпределителния метод е свързана с намирането на цикъла на всяка празна клетка, намирането на всички относителни оценки е доста продължителен процес. Затова в този пример ще вкарваме в базиса първата празна клетка, която не удовлетворява критерия за оптималност. В случая това е клетката $(1,2)$. Минималното количество в клетките, отбелязани с $-$, е 80.

Итерация 1:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(1)}$ (вж. табл. 6) по формули (6).

Таблица 6

$\boxed{3}$ 20	$\boxed{5}$ 80 $-$	$\boxed{7}$ $+$	$\boxed{11}$
$\boxed{1}$ 130	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$
$\boxed{5}$	$\boxed{8}$ 40 $+$	$\boxed{12}$ 80 $-$	$\boxed{7}$ 50

2. Първата празна клетка е $(1, 3)$. Нейният цикъл

$$\gamma_{13} : \underset{+}{(1,3)}\underset{-}{(3,3)}\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(1,2)}$$

е показан с пунктир на табл. 6. Така $\overline{c}_{13} = (7 + 8) - (12 + 5) = 15 - 17 = -2 < 0$. Следователно $\mathbf{x}^{(1)}$ не е оптимално бдр.

3. Минималното количество в отбелязаните с $-$ клетки е равно на 80. То се среща в две от тези клетки. Това означава, че следващото бдр ще бъде изродено.

Итерация 2:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(2)}$ (вж. табл. 7) по формули (6), като изваждаме от базиса клетката $(3, 3)$. Тогава клетката $(1, 2)$ става базисна нула (в тази клетка записваме числото 0 и не я оставяме празна).

Таблица 7

$\boxed{3}$ $-$ 20	$\boxed{5}$ $+$ 0	$\boxed{7}$ 80	$\boxed{11}$
$\boxed{1}$ 130	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$
$\boxed{5}$ $+$	$\boxed{8}$ 120 $-$	$\boxed{12}$	$\boxed{7}$ 50

2. Последователно намираме циклите и относителните оценки на празните клетки на това бдр:

$$\gamma_{14} : \underset{+}{(1,4)}\underset{-}{(3,4)}\underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(1,2)},$$
$$\overline{c}_{14} = (11 + 8) - (7 + 5) = 19 - 12 = 7 > 0,$$
$$\gamma_{22} : \underset{+}{(2,2)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,2)},$$
$$\overline{c}_{22} = (4 + 3) - (1 + 5) = 7 - 6 = 1 > 0,$$
$$\gamma_{23} : \underset{+}{(2,3)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,3)},$$
$$\overline{c}_{23} = (6 + 3) - (1 + 7) = 9 - 8 = 1 > 0,$$
$$\gamma_{24} : \underset{+}{(2,4)}\underset{-}{(2,1)}\underset{+}{(1,1)}\underset{-}{(1,2)}, \underset{+}{(3,2)}\underset{-}{(3,4)},$$

$$\bar{c}_{24} = (3 + 3 + 8) - (1 + 5 + 7) = 14 - 13 = 1 > 0,$$

$$\gamma_{31} : \underset{+}{(3, 1)}\underset{-}{(3, 2)}\underset{+}{(2, 1)}\underset{-}{(1, 1)},$$

$$\bar{c}_{31} = (5 + 5) - (8 + 3) = 10 - 11 = -1 < 0.$$

3. Минималното количество в отбелязаните с $-$ клетки е равно на 20.

Итерация 3:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(3)}$ (вж. табл. 8) по формули (6).

Таблица 8

[3]	[5] 20	[7] 80	[11]
[1] 130	[4]	[6]	[3]
[5] 20	[8] 100	[12]	[7] 50

2. Последователно намираме циклите и относителните оценки на празните клетки на това бдр: $\bar{c}_{11} = 1$, $\bar{c}_{14} = 7$, $\bar{c}_{22} = \bar{c}_{23} = \bar{c}_{24} = 0$, $\bar{c}_{34} = 2$. Следователно $\mathbf{x}^{(3)}$ е оптимално бдр. Оптималната стойност на целевата функция е 2040.

Остава само да отбележим, че относителните оценки на празните клетки във втория ред на таблицата са равни на нула. Това означава, че задачата има и други оптимални решения. Те се получават (още три на брой), като вкараме последователно в базиса тези три празни клетки. Така задачата притежава четири оптимални бдр. Да ги означим с $\mathbf{x}^{(3)}$, $\mathbf{x}^{(4)}$, $\mathbf{x}^{(5)}$ и $\mathbf{x}^{(6)}$. Общият вид на оптималните решения представлява изпъкналата обвивка на тези четири бдр

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j=3}^{6} \lambda_j \mathbf{x}^{(j)}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 3, \ldots, 6, \quad \sum_{j=3}^{6} \lambda_j = 1.$$

6. Метод на потенциалите

Този метод е вариант на двойствения симплекс метод.

6.1. Критерий за оптималност

Двойнствената задача на задача (2)–(5) е

$$\max w = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$

при ограничения

$$v_j - u_i \le c_{ij}, \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.$$

Двойствените променливи, отговарящи на ограниченията (3), са означени с $-u_i$, $i = 1, \dots, m$, а тези, отговарящи на ограниченията (4) са означени с v_j, $j = 1, \dots, n$. Прието е те да се наричат *потенциали*.

Лесно може да се провери, че ако $(-u_1, \dots, -u_m, v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$ е допустим вектор за горната задача, то и векторът $(-u_1 - h, \dots, -u_m - h, v_1 + h, \dots, v_n + h)^{\mathrm{T}}$, където $h = \mathrm{const}$, също е допустим за нея. Това означава, че всеки допустим вектор за тази двойствена задача е определен с точност до адитивна константа.

Теорема 8. Необходимо и достатъчно условие бдр $\bar{\mathbf{x}}$ да бъде оптимално решение на задача (2)–(5) е да съществува вектор $(-u_1, \dots, -u_m, v_1, \dots, v_n)^{\mathrm{T}}$, такъв че

$$v_j - u_i \le c_{ij} \text{ за } i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n, \tag{7}$$

$$v_j - u_i = c_{ij} \text{ за } x_{ij} > 0. \tag{8}$$

Теорема 8 следва от теоремите за двойнственост на общата задача на линейното оптимиране.

6.2. Алгоритъм на метода на потенциалите

Методът на потенциалите може да се опише с помощта на следния алгоритъм:

1. Построяваме начално бдр $\bar{\mathbf{x}}$ по някой от изложените методи. Преминаваме към т. 2.

2. Решаваме системата $v_j - u_i = c_{ij}$ за пълните (базисните) клетки на $\bar{\mathbf{x}}$. Тъй като броят на уравненията е $m + n - 1$, а броят на неизвестните е $m + n$, решението на системата е определено с точност до константа.

3. Проверяваме условията за оптималност (теорема 8). Ако те са изпълнени, бдр е оптимално и задачата е решена. *Край.*

   Ако условията за оптималност не са изпълнени, преминаваме към т. 4.

4. Определяме празна клетка (i_0, j_0), за която не е изпълнен критерият за оптималност, със свойството $c_{i_0 j_0} - v_{j_0} + u_{i_0} = \min\{c_{ij} - v_j + u_i : x_{ij} = 0\}$. Свързваме клетката (i_0, j_0) с базисните клетки чрез единствения цикъл. Построяваме ново бдр по формулите (6) и преминаваме към т. 2.

Забележка. Изборът на клетката (i_0, j_0) по начина, изложен в т. 3 на разпределителния метод (респ. т. 4 от метода на потенциалите), не е съществен, но се прави, за да има еднозначност при описанието на алгоритъма. Клетката (i_0, j_0) може да бъде произволно избрана между клетките (i, j), за които $\bar{c}_{ij} < 0$ (респ. $c_{ij} - v_j + u_i < 0$).

Пример 3. Да се приложи методът на потенциалите за решаване на задачата, дадена с таблицата

Таблица 9

1	5	30
7	2	60
3	10	60
90	30	

Решение. Задачата е от отворен тип. Превръщаме я в КТЗ с добавянето на фиктивен стълб (табл. 10).

Таблица 10

1	5	0	30
7	2	0	60
3	10	0	60
90	30	30	

Итерация 0:

1. Намираме начално бдр $\mathbf{x}^{(0)}$ по метода на северозападния ъгъл. Информацията за него се намира в табл. 11. Вижда се, че това бдр е изродено. Базисната нула може да бъде поставена и в клетката $(3, 1)$ вместо в $(2, 2)$.

Таблица 11

[1] 30	[5]	[0]	30
[7] 60	[2] 0	[0]	60
[3]	[10] 30	[0] 30	60
90	30	30	

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_2 - u_3 = 10,\ v_3 - u_3 = 0.$$

Полагайки $u_3 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_2 = 10$, $u_2 = 8$, $v_1 = 15$, $u_1 = 14$. Нанасяме потенциалите, както е показано в табл. 12.

Таблица 12

u_i \ v_j	15	10	0
14	[1] 30	[5]	[0]
8	[7] 60	[2] 0	[0]
0	[3]	[10] 30	[0] 30

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$v_2 - u_1 = -4 < 5 = c_{12}, \quad v_3 - u_1 = -14 < 0 = c_{13},$$
$$v_3 - u_2 = -8 < 0 = c_{23}, \quad v_1 - u_3 = 15 > 1 = c_{31}.$$

Бдр не е оптимално.

4. Цикълът на клетката $(3,1)$ е

$$\gamma_{31} : \underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(3,2)}\underset{+}{(2,2)}\underset{-}{(2,1)}.$$

Минималното количество в маркирана с $-$ клетка е 30.

Итерация 1:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(1)}$ (вж. табл. 13) по формули (6).

Таблица 13

u_i \ v_j	3	-2	0
2	$\boxed{1}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$
-4	$\boxed{7}$ 30	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{0}$
0	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$ 30

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_1 - u_3 = 3,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_3 - u_3 = 0.$$

Полагайки $u_3 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_1 = 3$, $u_2 = -4$, $v_2 = -2$, $u_1 = 2$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$\begin{aligned} v_2 - u_1 &= -4 < 5 = c_{12}, & v_3 - u_1 &= -2 < 0 = c_{13}, \\ v_3 - u_2 &= 4 > 0 = c_{23}, & v_2 - u_3 &= -2 < 10 = c_{31}. \end{aligned}$$

Бдр не е оптимално.

4. Цикълът на клетката $(2,3)$ е

$$\gamma_{23} : \underset{+}{(2,3)}\underset{-}{(3,3)}\underset{+}{(3,1)}\underset{-}{(2,1)}.$$

Минималното количество в маркирана с $-$ клетка е 30. То се среща два пъти, откъдето следва, че следващото бдр е изродено.

Таблица 14

$u_i \backslash v_j$	7	2	0
6	30 $\boxed{1}$	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$
0	0 $\boxed{7}$	30 $\boxed{2}$	30 $\boxed{0}$
4	60 $\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$

Итерация 2:

1. Определяме координатите на новото бдр $\mathbf{x}^{(2)}$ (вж. табл. 14) по формули (6).

2. Решаваме системата

$$v_1 - u_1 = 1,\ v_2 - u_2 = 2,\ v_1 - u_2 = 7,\ v_3 - u_2 = 0,\ v_1 - u_3 = 3.$$

   Полагайки $u_2 = 0$, намираме $v_3 = 0$, $v_1 = 7$, $v_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_1 = 6$.

3. Проверяваме условията за оптималност:

$$v_2 - u_1 = -4 < 5 = c_{12}, \quad v_3 - u_1 = -6 < 0 = c_{13},$$
$$v_2 - u_3 = -2 < 10 = c_{32}, \quad v_3 - u_3 = -4 < 0 = c_{33}.$$

   Това бдр е оптимално. Стойността на целевата функция е 270.

Задачи

1. Да се докаже, че задача (2)–(5) е изродена тогава и само тогава, когато съществуват индекси $i_1, \dots, i_p$, $p < m$, $j_1, \dots, j_q$, $q < n$, такива че $a_{i_1} + \cdots + a_{i_p} = b_{j_1} + \cdots + b_{j_q}$.

2. Да се докаже, че ако КТЗ е изродена, то съществува $\mu > 0$, такова че за всяко $\varepsilon \le \mu$ задачата $T(\varepsilon)$, за която $\mathbf{a}(\varepsilon) = (a_1 + \varepsilon, \dots, a_m + \varepsilon)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}(\varepsilon) = (b_1, \dots, b_{n-1}, b_n + m\varepsilon)^{\mathrm{T}}$, е неизродена.

3. Да се докаже, че ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са целочислени в (2)–(5), то задачата, за която $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b}' = \left(b_1 + \frac{1}{n}, \dots, b_n + \frac{1}{n}\right)^{\mathrm{T}}$, не може да бъде изродена.

4. Да се докаже, че ако КТЗ има само едно изродено бдр, то съществува само една двойка индекси (s, t), такива че $a_s + b_t = a_1 + \cdots + a_m$.

5. Нека

$$M(a, b, D) = \left\{ x = \{x_{ij}\} : \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j,\ 0 \le x_{ij} \le d_{ij} \right\}.$$

Да се докаже, че необходимото и достатъчно условие $M(a, b, D) \neq \emptyset$ е

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \right) \ge \sum_{j \in J} b_j, \quad J \subset \{1, \ldots, n\}.$$

6. Да се докаже, че ако съществува двойка индекси (l, t), такива че $c_{it} - c_{lt} > \max_{j \neq t}(c_{ij} - c_{lj})$, $i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m$, то за всяко оптимално решение $\mathbf{x} = (x_{ij})$ на КТЗ имаме $x_{lt} = \min(a_l, b_t)$.

7. Дадена е задачата

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ x_{ij} \ge 0,\ \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m, \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right\}.$$

Нека $\mathbf{x}^G$ е бдр, получено по метода на максималния елемент (аналогичен на метода на минималния елемент), а $\mathbf{x}^*$ е оптимално бдр. Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^G \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*.$$

8. Да се докаже, че ако в задача (2)–(5) $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са целочислени вектори, то всяко бдр е с целочислени координати.

9. Да се докаже Теорема 1.

10. Да се докаже Теорема 2.

11. Да се докаже Теорема 3.

12. Да се докаже Теорема 4.

13. Да се докаже Теорема 5.

14. Да се докаже Теорема 6.

15. Да се докаже Теорема 7.

16. Да се докаже Теорема 8.

17. Да се докаже, че двойнствената задача на задача (2)–(5) има безброй-но много допустими решения, различаващи се с адитивна константа.

18. Нека в задачата на ЛО $\max z = \mathbf{cx}$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ има ранг $m - 1$ (m е броят на редовете на $\mathbf{A}$) и всяко едно от ограниченията в системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е линейна комбинация на останалите ограничения. Да се докаже, че двойнствената на тази задача има безройно много допустими решения, различаващи се с адитивна константа (обобщение на твърдението в зад. 17).

19. Да се докаже, че всяко оптимално решение на КТЗ (2)–(5) е оптимал-но и за задачата, в която към всички коефициенти c_{ij}, разположени в един и същ ред (или един и същ стълб), е прибавена или извадена една и съща произволна константа.

20. Дадена е КТЗ с m производители и n потребители и транспортни разходи $c_{ij} = j + (i - 1)n$. Да се докаже, че за произволни наличности a_i и потребности b_j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, за които $a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$, всяко допустимо решение е оптимално.

21. За всяка от следните ТЗ да се намери оптимално решение и ако оптималното решение не е единствено, да се посочи още едно.

Забележка. В задачите, за които не е изпълнено условието за баланс, да се въведе по подходящ начин още един ред или стълб. Това се отнася и за следващите (22–25) задачи.

21.1. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (25, 20, 30)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (20, 40)^{\mathrm{T}}$;

21.2. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (180, 90)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (60, 75, 120, 45)^{\mathrm{T}}$;

21.3. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (30, 40, 10)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (20, 50)^{\mathrm{T}}$;

21.4. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (25, 20, 15, 40)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (60, 30)^{\mathrm{T}}$;

21.5. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (35, 55)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (30, 25, 55)^{\mathrm{T}}$;

21.6. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (110, 70)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (110, 60, 50)^{\mathrm{T}}$;

21.7. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 14 & 10 & 12 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (30, 45)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (25, 45, 25)^{\mathrm{T}}$;

21.8. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (100, 90, 150)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (80, 110, 120)^{\mathrm{T}}$;

21.9. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (50, 50, 15)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (30, 20, 40, 25)^{\mathrm{T}}$;

21.10. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (135, 90)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (75, 60, 135)^{\mathrm{T}}$.

22. Дадени са ТЗ (вж. забележката към зад. 21):

22.1. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (90, 60)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (50, 40, 90)^{\mathrm{T}}$;

а) да се намери произволно оптимално решение;

б) да се намери такова оптимално решение, за което $x_{13} = 60$.

22.2. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = (80, 20, 60)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{b} = (40, 100)^{\mathrm{T}}$;

а) да се намери произволно оптимално решение;

б) да се намери такова оптимално решение, за което $x_{12} = 50$.

23. За кои стойности на параметрите α и β бдр

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

на транспортната задача

$\alpha + \beta$	2	α	1	50
4	$\alpha - \beta$	2	-1	20
10	4	$\alpha + \beta$	10	70
30	40	60	10	

а) е оптимално решение;

б) е единствено оптимално решение;

в) не е единствено оптимално решение (намерете всички оптимални бдр, съседни на $\mathbf{x}^*$).

24. За кои стойности на параметъра a съответното бдр $\mathbf{x}^*$ за транспортните задачи, дадени с таблиците:

24.1.

1	3	a	90
4	2	1	50
30	60	70	

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix},$$

24.2.

a	7	30
4	6	25
7	6	20
45	15	

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix},$$

а) е оптимално;

б) не е оптимално, но задачата има оптимално бдр, съседно на $\mathbf{x}^*$.

Забележка. В зад. 24 и 25 бдр се отнасят за задачите, получени от изходните след подходящо въвеждане на ред или стълб с цел удовлетворяване на условието за баланс.

25. За кои стойности на параметрите α и β бдр

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 30 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 60 \end{pmatrix}$$

на ТЗ, дадена с таблицата

$\alpha+\beta$	0	2	β	100
−7	3	α	−2	50
0	α	−3	$\alpha+\beta$	70
20	60	80	60	

а) са оптимални решения на задачата;

б) са съседни бдр, без да са оптимални решения;

в) за стойностите на α и β, за които $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са оптимални решения, да се намери оптимално решение $\mathbf{z}^*$, за което $z^*_{12} = 25$.

Отговори и решения

1. *Достатъчност.* Нека съществуват (I_1, J_1) такива, че $\sum_{i\in I_1} a_i = \sum_{j\in J_1} b_j$. Тъй като $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j$, $I = \{1,\dots,n\}$, $J = \{1,\dots,m\}$, то $\sum_{i\in I\setminus I_1} a_i = \sum_{j\in J\setminus J_1} b_i$. Разглеждаме следните транспортни ограничения T_1 и T_2:

$$T_1 = \left\{ (x_{ij})_{j\in J_1}^{i\in I_1} : \sum_{i\in I_1} x_{ij} = b_j,\ j\in J_1, \sum_{j\in J_1} x_{ij} = a_i,\ i\in I_1,\ x_{ij} > 0 \right\},$$

$$T_2 = \left\{ (x_{ij})_{j\in J\setminus J_1}^{i\in I\setminus I_1} : \begin{array}{l} \sum_{i\in I\setminus I_1} x_{ij} = b_j,\ j\in J\setminus J_1, \\ \sum_{j\in J\setminus J_1} x_{ij} = a_i,\ i\in I\setminus I_1, \end{array} x_{ij} > 0 \right\}.$$

Ако $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ са върхове на T_1 и T_2, то по очевиден начин се конструира допустим вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяващ ограниченията $\sum_{j\in J} x_{ij} = a_i$, $\sum_{i\in I} x_{ij} = b_j$, който е връх и има най-много $m + n - 2$ ненулеви променливи.

Необходимост. Нека $\mathbf{x}$ е връх, който е изроден, т. е. съществува базисна променлива, която е равна на нула. Всеки връх чрез подходяща пермутация на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ може да се построи по метода на северозападния ъгъл. Тъй като на определена стъпка (когато определяме нулевата базисна променлива) коригираните a_i и b_j са равни на нула, от това непосредствено следва, че съществуват множества от индекси S и T, за които $\sum_{i\in T} a_i = \sum_{j\in S} b_j$.

2. Тъй като задачата е изродена, то съществуват двойки множества от индекси (I_i, J_i), $i = 1,\dots,s$, такива, че $\sum_{j\in I_i} a_j = \sum_{j\in J_i} b_j$, $i = 1,\dots,s$. Ще покажем, че съществува ε_0 такова, че за всяко $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и за всяка двойка множества (I, J)

$$\sum_{j\in I} a_j(\varepsilon) \neq \sum_{j\in J} b_j(\varepsilon). \tag{9}$$

За всяка двойка (I_i, J_i) очевидно

$$\sum_{j\in I_i} a_j(\varepsilon) = \sum_{j\in I_i} a_j + |I_i|\varepsilon \neq \sum_{j\in J_i} b_j(\varepsilon) = \begin{cases} \sum_{j\in J_i} b_j, & m\notin J_i, \\ \sum_{j\in J_i} b_j + m\varepsilon, & m\in J_i, \end{cases}$$

тъй като $|I_i| < m$ за всяко $\varepsilon > 0$. Нека (I, J) е произволна двойка, различна от (I_i, J_i), $i = 1,\dots,s$. Възможни са два случая: $m\in J$ и $m\notin J$. Ако $m\notin J$, то тъй като $\sum_{j\in I} a_j \neq \sum_{j\in J} b_j$, ако $\sum_{j\in I} a_j \geq \sum_{j\in J} b_j$, то достатъчно е $\varepsilon > 0$, за да бъде изпълнено (9). Ако $m \in J$, тъй като $\sum_{j\in I} a_j \neq \sum_{j\in J} b_j$, са възможни два случая: а) $\sum_{j\in I} a_j < \sum_{j\in J} b_j$. За да бъде изпълнено (9), е достатъчно $\varepsilon \geq 0$; б) $\sum_{j\in I} a_j > \sum_{j\in J} b_j$. За да бъде изпълнено (9), достатъчно е $\varepsilon < \frac{1}{m-|I|}\left(\sum_{j\in I} a_j - \sum_{j\in J} b_j\right)$ за тези I, за които $|I| < m$. Нека $\delta_1 = \min \frac{1}{|I|}\left(\sum_{j\in I} a_j - \sum_{j\in J} b_j\right)$ по тези двойки (I, J), за които $\sum_{j\in J} b_j - \sum_{j\in I} a_j > 0$ и $m \notin J$. Нека $\delta_2 = \min \frac{1}{m-|I|}\left(\sum_{j\in I} a_j - \sum_{j\in J} b_j\right)$ по тези двойки (I, J), за които $m \in J$, $|I| < m$ и $\sum_{j\in I} a_j - \sum_{j\in J} b_j > 0$. Тогава за всяко $\varepsilon < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ е изпълнено (9).

3. Решението следва непосредствено от решението на задача 2 и условието за целочисленост (от него следва, че ако $\sum_{j\in J} b_j - \sum_{j\in I} a_j > 0$, то $\sum_{j\in J} b_j - \sum_{j\in I} a_j \geq 1$).

4. Тъй като задачата е изродена, то съществува двойка множества от индекси (I, J) такава, че $\sum_{j\in J} b_j = \sum_{j\in I} a_j$. Ако $|I| \geq 2$ и $|J| \geq 2$, очевидно задачата има повече от един изроден връх. Следователно поне за едно от множествата I или J имаме $|I| = 1$ или $|J| = 1$. Без да нарушаваме общността, можем да предположим, че $|J| = 1$. Следователно съществува индекс t_1: $b_{t_1} = \sum_{j\in I} a_j$. Ако допуснем, че $|I| < m - 1$, стигаме до противоречие с единствеността на изродения връх. Следователно съществува индекс s_1 такъв, че $a_{s_1} + b_{t_1} = \sum_{j=1}^{m} a_j$. Ако допуснем, че съществува друга двойка индекси (s_2, t_2), за които $a_{s_2} + b_{t_2} = \sum_{j=1}^{m} a_j$, то стигаме до противоречие с единствеността.

5. *Необходимост*. Проверява се непосредствено.

Достатъчност. Ще докажем твърдението по индукция спрямо m и n. За това е достатъчно да разгледаме двойките (m, n), $m \leq n$, от цели положителни числа, наредени линейно с помощта на наредбата $\prec$, която се дефинира по следния начин: $(m_1, n_1) \prec (m_2, n_2)$, ако $n_1 < n_2$ или ако $n_1 = n_2$ и $m_1 \leq m_2$. За $(1, 1)$ твърдението е вярно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всички двойки $(m, n) \prec (m_0, n_0)$. Ще покажем, че то е вярно и за двойката (m_0, n_0).

От условието

$$\sum_{i=1}^{m_0} \min\left(a_i, \sum_{j\in J} d_{ij}\right) \geq \sum_{j\in J} b_j, \qquad J \subset \{1,\dots,n_0\},$$

при $J = \{1\}$ следва, че $\sum\limits_{i=1}^{m_0} \min(a_i, d_{i1}) \geq b_1$. Нека i_0 е индексът, за който $\sum\limits_{i=1}^{i_0-1} c_i < b_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{i_0} c_i \geq b_1$. Очевидно $i_0 \leq m_0$. Да разгледаме множеството $M(\overline{a}, \overline{b}, \overline{D})$ с размерност $m_0 \times n_0 - 1$, параметрите на което са: $\overline{a}_i = a_i - c_i$, $i = 1,\dots,i_0-1$, $a_{i_0} = a_{i_0} - \left(b_1 - \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} c_i\right)$, $\overline{a}_i = a_i$, $i = i_0+1,\dots,m_0$, $\overline{b}_i = b_{i+1}$, $i = 1,\dots,n_0-1$, $\overline{D} = \{\overline{d}_{ij}\}$, $\overline{d}_{ij} = d_{ij+1}$, $i = 1,\dots,m_0$, $j = 1,\dots,n_0-1$. Лесно се проверява, че $\sum\limits_{i=1}^{m_0} \min\left(\overline{a}_i, \sum\limits_{j\in J} \overline{d}_{ij}\right) \geq \sum\limits_{j\in J} \overline{b}_j$ за всяко $J \subset \{1,\dots,n_0-1\}$. От това по индуктивното предположение следва, че $M(\overline{a}, \overline{b}, \overline{D}) \neq \emptyset$, т. е. съществува допустим вектор $\overline{\mathbf{x}}$, удовлетворяващ ограниченията, които задават множеството $M(\overline{a}, \overline{b}, \overline{D}) \neq \emptyset$. Непосредствено се вижда, че

$$\mathbf{x} = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & \\ c_{i_0-1} & \\ b_1 - \sum\limits_{i=1}^{i_0-1} c_i & \overline{\mathbf{x}} \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{array}\right)$$

удовлетворяват ограниченията, задаващи множеството $M(a, b, D)$.

6. Допускаме, че съществува връх $\mathbf{x}$, за който $x_{lt} < \min\{a_l, b_t\}$. От условията $c_{it} - c_{lt} > \max\limits_{j\neq t}(c_{ij} - c_{lj})$ непосредствено следва, че съществува небазисна променлива $x_{i_0 j_0} = 0$, за която $\overline{c}_{i_0 j_0} < 0$. Противоречие.

7. *Упътване*. Нека $\mathbf{x}^G$ и $\mathbf{x}^*$ са съответно бдр, намерено по метода на максималния елемент, и оптимално бдр на задачата. Нека $c_1 \geq \cdots \geq c_{nm} \geq 0$. С помощта на тъждеството $\sum\limits_{i=1}^{nm} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{nm} (c_i - c_{i+1}) \left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j\right)$, $c_{nm+1} = 0$, покажете, че

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{mn} c_i x_i^G}{\sum\limits_{i=1}^{mn} c_i x_i^*} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{nm}(c_i - c_{i+1})\left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^G\right)}{\sum\limits_{i=1}^{nm}(c_i - c_{i+1})\left(\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^*\right)} \geq \min \frac{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^G}{\sum\limits_{j=1}^{i} x_j^*} \geq \frac{1}{2}.$$

8. Тъй като векторите **a** и **b** са целочислени, то началното бдр, построено по един от методите, изложени в §4, е целочислено. От теорема 7 следва, че преминаването от целочислено бдр към следващо води отново до целочислено бдр. Тъй като това е вярно за всяка линейна целева функция, то всички бдр са целочислени.

9. *Необходимост*. Очевидна. *Достатъчност*. Нека $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{s}$, където $s = a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n$. Непосредствено се проверява, че $\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \ldots, m$, и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$. Следва, че КТЗ има оптимално решение (вземаме под внимание още, че транспортният многостен е ограничен).

10. Това, че рангът на **A** не е по-голям от $m + n - 1$, следва от теорема 1. Тогава условието за баланс (1) води до факта, че сумата на ограниченията (3) е равна на сумата на ограничения (4), т. е. между ограниченията (3)–(4) има линейна зависимост. Тогава да махнем последното ограничение от (4). Вземаме стълбовете $\mathbf{A}_{1n}$, $\mathbf{A}_{2n}$, …, $\mathbf{A}_{mn}$, $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, …, $\mathbf{A}_{1n-1}$ на матрицата **A** без последната им координата. Получената детерминанта

$$\det \| \underbrace{\mathbf{A}_{1n}\mathbf{A}_{2n} \ldots \mathbf{A}_{mn}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} \ldots \mathbf{A}_{1n-1}}_{\text{без последната координата}} \| = 1.$$

Следователно в модифицираната матрица **A** има $m+n-1$ линейно независими стълба, откъдето следва, че $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m + n - 1$.

11. На клетките от цикъла алтернативно присвояваме $+$ и $-$. От определението на цикъл и това, че всеки стълб съдържа точно два ненулеви елемента, които са единици, следва, че сумата на векторите, умножени съответно с $+1$ и -1, е равна на нула.

12. Вж. зад. 10.

13. Да допуснем, че за някоя празна клетка съществуват поне два цикъла. От тях може да се построи цикъл, съдържащ само базисни клетки, което противоречи на това, че **x** е бдр.

14. *Необходимост.* Нека $\mathbf{x}' = (x'_{ij})$ е оптимално. Да допуснем, че съществува празна клетка (k,l), за която $\overline{c}_{kl} < 0$. Използвайки процедурата, описана в теорема 7, намираме ново бдр $\mathbf{x}''$. Да пресметнем стойността на целевата функция в $\mathbf{x}''$. Най-напред да означим

$$S = \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}x'_{ij}, \qquad S^{\pm} = \sum_{(i,j)\in\gamma^{\pm}_{kl}} c_{ij}x'_{ij}.$$

Тогава $z(\mathbf{x}') = S + S^{+} + S^{-}$ и

$$\begin{aligned}
z(\mathbf{x}'') &= \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}x''_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^{+}_{kl}} c_{ij}x''_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} c_{ij}x''_{ij} \\
&= \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}x'_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma^{+}_{kl}} c_{ij}(x'_{ij} + x_{i_p j_p}) + \sum_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} c_{ij}(x'_{ij} - x_{i_p j_p}) \\
&= S + S^{+} + S^{-} + x_{i_p j_p}\left(\sum_{(i,j)\in\gamma^{+}_{kl}} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma^{-}_{kl}} c_{ij}\right) \\
&\le z(\mathbf{x}').
\end{aligned}$$

Ако $\mathbf{x}'$ е неизродено, то със сигурност $x_{i_p j_p} > 0$ и противоречието е очевидно. Ако $x_{i_p j_p}$ е базисна нула, то $\mathbf{x}'' \equiv \mathbf{x}'$ и става само смяна на базиса на изродено бдр.

Достатъчност. Щом $z(\mathbf{x}'') = z(\mathbf{x}') + x_{i_p j_p}\overline{c}_{kl}$ и $\overline{c}_{kl} \ge 0$ за всяка небазисна клетка на $\mathbf{x}'$, то за всяко съседно на $\mathbf{x}'$ бдр $\mathbf{x}''$ е изпълнено $z(\mathbf{x}'') \ge z(\mathbf{x}')$, т. е. $\mathbf{x}'$ е оптимално.

15. Координатите на $\mathbf{x}''$ удовлетворяват ограниченията на КТЗ, защото количеството $x_{i_p j_p}$ се премества в рамките на един ред и един стълб, като се прибавя към една клетка от този ред (стълб) и се изважда от друга клетка на същия ред (стълб). Съвкупността от пълните клетки H'' на допустимия вектор $\mathbf{x}''$ се различава от съвкупността на пълните клетки H' на $\mathbf{x}'$ по това, че съдържа клетката (k,l) вместо една клетка от γ^{-}_{kl}. Следователно в H'' с изключение на (k,l) всички останали клетки са от една ациклична съвкупност. Тогава, ако допуснем, че в H'' има цикъл, то той непременно съдържа (k,l). Допускането, че H'' съдържа цикъл води до факта, че този цикъл трябва да съдържа (k,l), а не съдържа (i_p, j_{p-1}) за някое p. Следователно съществуват поне два цикъла (единият с (i_p, j_{p-1}), а другият без нея), които свързват (k,l) с ациклична съвкупност от клетки, което е невъзможно според теорема 5. Така H'' е ациклична съвкупност от клетки за допустимия вектор $\mathbf{x}''$, т. е. $\mathbf{x}''$ е бдр.

16. *Необходимост.* Нека $\mathbf{x}^* = (x^*_{ij})$ е оптимално. Тогава и двойствената на КТЗ има оптимално решение, а (7) не са нищо друго освен ограниченията на двойствената на КТЗ. Като вземем предвид, че $v_j - u_i \le c_{ij}$ и $v_{ij} \ge 0$ образуват двойка спрегнати условия за $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, то (8) не е нищо друго освен факта, че от двойка спрегнати условия едното е свободно, а другото — закрепено.

Достатъчност. Нека координатите на $(-u_1, \dots, v_n)^\mathrm{T}$ удовлетворяват (7) и (8). За произволен допустим вектор на КТЗ $\mathbf{x}' = (x'_{ij})$ имаме

$$\begin{aligned}
z(\mathbf{x}') &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} \overset{(7)}{\ge} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_i)x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x'_{ij}\\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i\\
&= \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(v_j - u_i)x_{ij} \overset{(8)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = z(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Следователно $\mathbf{x}$ е оптимално.

17. Ако $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]^\mathrm{T} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)^\mathrm{T}$ е решение на системата $v_j - u_i \le c_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, очевидно и $[\mathbf{u} + h, \mathbf{v} + h]^\mathrm{T} = (u_1 + h, \dots, u_m + h, v_1 + h, \dots, v_n + h)^\mathrm{T}$, $h = \mathrm{const}$, също е нейно решение.

18. Да означим i-тия ред на $\mathbf{A}$ с $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$. От условията на задачата следва, че съществуват числа λ_i, $i = 1, \dots, m$ (поне едно различно от нула) такива, че $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$. Ще покажем, че $\lambda_i \ne 0$ за всяко $i = 1, \dots, m$. Да допуснем например, че $\lambda_1 = 0$. Тогава (от $\sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, $\sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i b_i = 0$, $\sum\limits_{i=2}^{m} |\lambda_i| \ne 0$) следва, че съществува линейна зависимост между ограниченията с номера от 2 до m и следователно рангът на редуцираната система (без първото ограничение) е $\le m - 2$. Но първото ограничение (по условие) е линейна комбинация на останалите и следователно след прибавянето му към тях рангът на новата система (това отново е изходната) ще остане същият, което противоречи на това, че той е равен на $m - 1$. Следователно $\lambda_1 \ne 0$. Да означим с $\overline{\mathbf{A}}$ матрицата с редове $\overline{\mathbf{a}}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$ и с $\overline{\mathbf{b}}$ вектора с координати $\lambda_i b_i$, $i = 1, \dots, m$. Системата $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}$ е еквивалентна на изходната (получена е от нея чрез умножаване на редовете ѝ с числа, различни от нула). Изходната задача записваме в еквивалентната ѝ форма $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. В тази задача сумата от елементите на всеки стълб на $\overline{\mathbf{A}}$ е равна на нула. Нейната двойствена задача е $\min\{\overline{\mathbf{x}}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{y} : \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}\}$. Ако $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на тази задача, векторът $\mathbf{y}(a) = (y_1^* + a, \dots, y_m^* + a)^{\mathrm{T}}$ удовлетворява системата $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$ (коефициентът в кое да е от ограниченията пред a е равен на нула), $\overline{\mathbf{x}}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{y}(a) = \overline{\mathbf{x}}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^*$ (по същата причина) и следователно също е оптимално решение.

19. Нека от дадената задача е получена нова чрез прибавяне на константа k към s-тия ред (съответно r-тия стълб) на матрицата $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$. Разликата между транспортните разходи за даден допустим вектор $\mathbf{x} = (x_{ij})$ на изходната и получената задача не зависи от вектора $\mathbf{x}$ — тя е равна на ka_s (съответно kb_r).

20. Нека $\mathbf{x} = (x_{ij})$ е допустим вектор на задачата. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} &= \sum_i \sum_j (j + (i-1)n)x_{ij} = \sum_j j \sum_i x_{ij} + \sum_i (i-1)n \sum_j x_{ij} \\ &= \sum_j jb_j + n\sum_i (i-1)a_i,\end{aligned}$$

т. е. транспортните разходи не зависят от вектора $\mathbf{x} = (x_{ij})$.

21.1. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 5 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 300$.

21.2. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15 & 75 & 90 & 0 \\ 45 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 615$.

21.3. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 40 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 180$.

21.4. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 190$.

21.5. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 300$.

21.6. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 50 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 500$.

21.7. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 0 \\ 0 & 20 & 25 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 520$.

21.8. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 80 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 0 \\ 0 & 110 & 10 & 30 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 980$.

21.9. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 40 & 10 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (единствен), $z^* = 255$.

21.10. $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 75 & 15 & 45 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 45 & 0 \end{pmatrix}$ (не е единствен), $z^* = 780$.

22.1. а) $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 40 \\ 0 & 10 & 50 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 20 & 10 & 30 \\ 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}$, $z^* = 520$.

22.2. а) $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 40 & 20 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{x}^{**} = \begin{pmatrix} 30 & 50 & 0 \\ 5 & 15 & 0 \\ 5 & 35 & 20 \end{pmatrix}$, $z^* = 360$.

23. а) $4 \le \alpha \le 6$, $\beta = 5$. б) За никои стойности на α и β оптималното решение не е единствено; в) При $\beta = 2$, $\alpha = 4$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 30 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 40 & 30 & 0 \end{pmatrix};$$

при $\beta = 2$, $\alpha = 6$ оптимални бдр, съседни на $\mathbf{x}^*$, са $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ и $\mathbf{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; при $\beta = 2$, $4 < \alpha < 6$ — само $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$.

24.1. а) $2 \le a \le 3$. б) $0 \le a \le 2$ или $a > 3$.

24.2. а) $4 \le a \le 7$. б) $a < 4$ или $7 < a \le 8$.

25. а) $\alpha \le -5$, $\beta \le -\alpha$, $\alpha(\mathbf{x}^*) = \alpha(\mathbf{y}^*) = 80(\alpha + \beta) + 60(\alpha + 1)$; б) $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ са съседни независимо от стойностите на α и β. Не са оптимални решения при $\alpha > -5$ или $\alpha < -\beta$. в) $\mathbf{z}^* = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 30 & 25 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 35 \end{pmatrix}$.