Примерно решение на домашно №4 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Зад. 1 Семейство Петрови кани четири семейства на гости. Четирите семейства пристигат в уречения час и всеки от пристигащите гости или се здрависва с поне един (една) от досега присъстващите (двамата домакини и вече пристигналите гости), или не се здрависва с никого. След пристигането на всички гости, домакинята г-жа Петрова пита всеки от другите хора (включително и съпруга си) в колко здрависвания е участвал (участвала). Всеки от запитаните отговаря и няма два еднакви отговора. В колко здрависвания е участвала г-жа Петрова? Приемаме, че всеки двама души се здрависват най-много веднъж и че никой не се здрависва със своята съпруга (съпруг).

Решение: Общо присъстващите са 5 семества, тоест 10 човека. Всеки от тях може да се ръкува най-много с 8 човека, защото не се ръкува със себе си (очевидно) и със съпругата си (съпруга си). Най-малкият брой ръкувания е 0. Тъй като г-жа Петрова е питала 9 човека и е получила само различни отговори, тя е чула числата $0, 1, \ldots, 8$. Да номерираме деветте човека (всички присъстващи без г-жа Петрова) с числата $0, 1, \ldots, 8$, съгласно дадените отговори. Да разглеждаме тези девет човека последователно. Първо да разгледаме номер 8. Той или тя трябва да се е здрависал (здрависала) с всички останали—включително и с г-жа Петрова—без своята съпруга (съпруг). Излиза, че номер 8 и номер 0 са семейство. Освен това, никой от тях не е г-жа Петрова, защото тя е извън деветте.

Да разгледаме номер 7. Той или тя се е здрависал (здрависала) с номер 8, но не с номер 0 (номер 0 не участва в здрависване) и номер 1 (защото номер 1 участва в точно едно здрависване, а именно с номер 8, така че няма как да се е здрависал/здрависала и с номер 7). Освен това, номер 7 се здрависал/здрависала с г-жа Петрова. Излиза, че номер 7 и номер 1 са семейство и никой от тях не е г-жа Петрова.

Напълно аналогично, номер 6 и номер 2 са семейство и никой от тях не е г-жа Петрова. Също така, номер 5 и номер 3 са семейство и никой от тях не е г-жа Петрова.

Тогава остава единствената възможност съпругът на г-жа Петрова да е номер 4. Следва, че г-жа Петрова се е здрависала с точно четири човека: а именно, номера 8, 7, 6 и 5.

Очевидно задачата може да се моделира с неориентиран граф, като цялата тънкост е в построяването на графа. □

Зад. 2 Дадена е електрическа машина с 26 входа и 26 изхода. На всеки вход отговаря точно една буква от латинската азбука $\boxed{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{Z}}$, като това съответствие е фиксирано и не може да бъде променяно. Казваме, че във вход 1 “влиза” $\mathcal{A}$, във вход 2 “влиза” $\mathcal{B}$, и така нататък, във вход 26 “влиза” $\mathcal{Z}$. Изходите са номерирани и на всеки изход “излиза” точно една от латинските букви, но съответствието между изходи и букви не е фиксирано, а може да бъде променяно от оператора на машината по следния начин. Машината има *щекерпанел*: панел върху лицевата страна на машината, върху който има 26 малки кръгли отвора с еднакъв диаметър. Всеки отвор на панела е маркиран с точно една от латинските букви. Операторът разполага с 13 еднакви кабелчета, всяко с два накрайника. Дадено кабелче се използва, като накрайниците му се пъхат в два от отворите. В един отвор не може да бъдат пъхнати два накрайника. Операторът може да използва между 0 и 13 кабелчета. Кабелчетата са достатъчно дълги, за да свържат и най-отдалечените отвори. Ефектът от използването на кабелчетата е следният:

- Ако не бъде използвано нито едно кабелче, на изход 1 излиза $\mathcal{A}$, на изход 2 излиза $\mathcal{B}$, и така нататък, на изход 26 излиза $\mathcal{Z}$.
- Ако бъде използвано точно едно кабелче, ефектът е това и единствено това, че буквите, които то свързва на щекерпанела, биват разменени. Примерно, ако на щекерпанела кабелчето свързва $\mathcal{C}$ с $\mathcal{T}$, то на изход 3 излиза $\mathcal{T}$, на изход 20 излиза $\mathcal{C}$, а на всеки друг изход излиза същата буква, която би излизала, ако на щекерпанелът нямаше кабелчета.

- Ако бъдат използвани точно две кабелчета на щекерпанела, техните съответни букви биват разменени, останалите букви излизат все едно няма кабелчета. Примерно, ако на щекерпанела едното кабелче свързва $\mathcal{C}$ с $\mathcal{T}$, а другото свързва $\mathcal{A}$ с $\mathcal{M}$, на изход 1 излиза $\mathcal{M}$, на изход 3 излиза $\mathcal{T}$, на изход 13 излиза $\mathcal{A}$, на изход 20 излиза $\mathcal{C}$, а на всеки друг изход излиза същата буква, която би излизала, ако на щекерпанелът нямаше кабелчета.

- ...

- Ако бъдат използвани всички 13 кабелчета на щекерпанела, всички двойки букви биват разменени по двойки съгласно това, коя с коя буква е свързана на щекерпанела.

Очевидно, тази машина реализира разместване на буквите между входа и изхода. Колко различни размествания на буквите може да бъдат реализирани при използване на 10 кабелчета? А при използване на 13 кабелчета? Сравнете тези числа с всички теоретично възможни размествания на 26-те букви – става дума не за размените, които *тази* машина реализира, а максималният брой размествания, които са теоретично възможни. На какво се дължи голямата разлика между първите две числа и третото?

Решение: Ако се ползват 10 кабелчета, то точно 20 букви участват в размествания по двойки, а 6 букви не участват. Има точно $\binom{26}{20} = \binom{26}{6}$ възможности за избор на букви-участници. За всеки от тези избори, начините да бъдат свързани буквите-участници по двойки са

$$19 \times 17 \times 15 \times \cdots \times 3 \times 1 = \prod_{i=1}^{10}(2i-1) = 654\,729\,075$$

Разсъждението е следното: първата буква може да бъде свързана с двойка с коя да е от останалите 19, след това остават 18 букви, за първата има 17 букви-кандидати, и така нататък. Отговорът за 10 кабелчета е

$$\binom{26}{6} \times \prod_{i=1}^{10}(2i-1) = 150\,738\,274\,937\,250 \approx 10^{14.2}$$

Аналогично, отговорът за 13 кабелчета е

$$\prod_{i=1}^{13}(2i-1) = 7\,905\,853\,580\,625 \approx 10^{12.9}$$

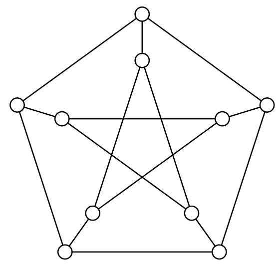
От друга страна, всички пермутации на 26 букви са

$$26! = 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000 \approx 10^{26.6}$$

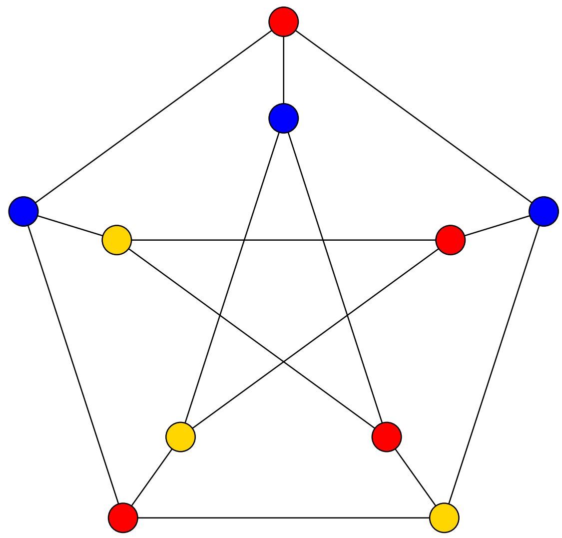
Прави впечатление, че това число е много по-голямо от броя на пермутациите, които реализира въпросната машина. Очевидно машината реализира само нищожно малка част от всички възможни пермутации. Машината реализира пермутации чрез разменяне на местата на двойки елементи. Не всяка пермутация може да бъде получена по този начин. Примерно, пермутацията, при която $\mathcal{A}$ отива на мястото на $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ отива на мястото на $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{Y}$ отива на мястото на $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}$ отива на мястото на $\mathcal{A}$ не може да бъде получена чрез (еднократна) размяна на двойки съседни елементи. Получените числени данни навеждат на мисълта, че пермутациите, които се получават чрез разменяне на двойки са нищожно малка част от всички пермутации, при голям брой на участващите елементи.

□

Зад. 3 *Хроматично число* на граф е най-малкият брой цветове, с които може да бъдат оцветени върховете на графа, така че краищата на нито едно ребро да не бъдат в един и същи цвят. Какво е хроматичното число на следния граф?



Решение: Даденият граф има поне един цикъл с нечетна дължина, така че хроматичното число не може да е 2. Графът е 3-оцветим, както се вижда на следната фигура, следователно хроматичното число е 3:



□

Зад. 4 Даден е куб от сирене 30 cm × 30 cm × 30 cm, който се състои от 27 кубчета, всяко от които с размери 10 cm × 10 cm × 10 cm, долепени едно до друго по очевидния начин. Две кубчета са съседни, ако имат обща стена. Екстремните кубчета са осемте кубчета, в които лежат осемте върха на големия куб.

Дадена е и мишка, която иска да изяде цялото сирене. Мишката иска първо да изяде едно от екстремните кубчета, после някое негово съседно, и така нататък до края, прехвърляйки се от кубче в негово съседно. Мишката иска последното изядено кубче да е централното (което има шест съседни кубчета). Може ли мишката да изяде сиренето по този начин? Обосновете **кратко** отворите си.

Решение: Мишката не може да изяде сиренето по този начин. Да моделираме задачата с граф: кубчетата са върховете, два върха са съседни тогава и само тогава, когато съответните кубчета имат обща стена.

Очевидно графът е двуделен. Да кажем, че единият дял са белите върхове, а другият, черните. Всички екстремни кубчета се намират в единия дял, а централното кубче е в другия дял. Без ограничение на общността, нека екстремните са бели, а централното, черно.

За да изяде сиренето по желания начин, мишката трябва да се движи по път в графа, по който цветовете алтернират: бял, черен, бял, черен, и така нататък, завършвайки с черен връх. Освен това, този път трябва да е Хамилтонов. Белите върхове обаче са на брой $5+4+5=14$, а черните са само $4+5+4=13$. Даденият граф има Хамилтонови пътища, но очевидно всеки от тях започва и завършва с бял връх, защото белите са с един повече от черните. Следователно, няма път с алтерниращи цветове, който да започва с бял и да завършва с черен връх.

□

БОНУС По колко начина може Дядо Коледа да раздаде 19 различни подаръка на 6 деца, така че всяко дете да получи поне два подаръка?

Решение: Задачата е частнен случай на задачата, колко са функциите $f : X \to Y$, такива че $\forall c \in Y \exists a, b \in X : a \neq b \wedge f(a) = f(b) = c$, ако $|X| = m$ и $|Y| = n$. Можем да наречем тези функции, "двукратни сюрекции", тъй като всеки елемент от кодомейна трябва да е "покрит" от поне два различни елемента от домейна.

Решението се получава чрез принципа на включването и изключването, аналогично на обикновените сюрекции. Сега обаче трябва да съобразим по колко различни начина може даден елемент от кодомейна да бъде "нарушител". При обикновените сюрекции даден елемент може да е "нарушител" по един начин: да не е образ на никой елемент от домейна. При двукратните сюрекции може да е "нарушител" по два начина: да не е покрит изобщо, или да е покрит само веднъж. Отговорът-формула е

$$\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} \left(\prod_{t=0}^{l-1} (m-t) \right) (n-k)^{m-l} \right) \right) \tag{1}$$

Сравнете този израз с формулата за броя на сюрекциите:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \tag{2}$$

Да аргументираме (1). Частта $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}}$ е същата в (1) и (2), защото е свързана с прилагането на принципа на включването и изключването: нарушителите са от 0 до n, за k на брой нарушителя събираемото е със знак $(-1)^k$, и има $\binom{n}{k}$ начина да изберем k нарушителя от общо n елемента. По отношение на (2), разсъждението за множителя $\boxed{(n-k)^m}$ е много просто: това е броят на всички функции, без ограничения, от m-елементен домейн в $(n-k)$-елементен кодомейн.

По отношение на (1), разсъждението за множителя $\sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} \left(\prod_{t=0}^{l-1} (m-t) \right) (n-k)^{m-l} \right)$ е по-сложно. Всеки от тези k нарушителя може да е нарушител по един от двата начина: може да е не е покрит изобщо, или може да е покрит еднократно. Нека l е броят на тези нарушители, които са покрити еднократно. Сумираме за $l = 0, \ldots, k$ със следните съображения.

- При $l = 0$ всички k нарушители не са покрити изобщо, и събираемото става

  $$\binom{k}{0} \left(\prod_{t=0}^{0-1} (m-t) \right) (n-k)^{m-0} = 1 \times 1 \times (n-k)^m = (n-k)^m$$

  тоест точно колкото е съответния множител в (2). Тук имаме итерирано произведение $\prod_{t=0}^{0-1} (m-t)$, в което индексната променлива взема стойности от празен интервал; по дефиниция, такова произведение е $1^{\dagger}$.

- При $l = 1$ имаме точно един нарушител, който е покрит еднократно, а останалите нарушители не са покрити изобщо. Този нарушител можем да изберем по $\binom{k}{1} = k$ начина. Тъй като е покрит еднократно, нарушителят е образ на точно един елемент от домейна, който можем да изберем по $\prod_{t=0}^{1-1} (m-t) = m$ начина. Множителят $(n-k)^{m-1}$ идва оттам, че за останалите елементи от кодомейна—тези, които не са нарушители—разглеждаме всички функции без ограничения от $(m-1)$-елементен домейн в тях. Защо $(m-1)$-елементен? – защото точно един елемент от домейна бива "използван", за да бъде изобразен в единствения нарушител, който е покрит еднократно.

  Събираемото става

  $$\binom{k}{1} \left(\prod_{t=0}^{1-1} (m-t) \right) (n-k)^{m-1} = k \times m \times (n-k)^{m-1}$$

---
† Тъй като 1 е неутралният елемент на операцията умножение. Аналогично, итерирано сумиране, при което индексната променлива взема стойности от празен интервал, е 0, понеже 0 е неутралният елемент на събирането.

- При $l=2$, нарушителите, покрити еднократно, са 2. Тях можем да изберем по $\binom{k}{2}$ начина. По $m(m-1)$ начина можем да изберем два елемента от домейна, които се изобразяват в тези два нарушителя. Важно е да бъде разбрано, че този брой е именно $m(m-1)$, а не $\binom{m}{2}$, защото има значение кой елемент (от двата) от домейна върху кой от двата нарушителя се изобразява. С други думи, множителят е $\prod_{t=0}^{2-1}(m-t)=m(m-1)$. Тъй като вече изпозлвахме два елемента от домейна, остават $m-2$ елемента от домейна, такива че за последния множител разглеждаме всички функциии от тях върху $(n-k)$-елементен кодомейн, които са на брой $(n-k)^{m-2}$. Събираемото става

$$\binom{k}{2}\left(\prod_{t=0}^{2-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-2}=\binom{k}{2}\times m(m-1)\times(n-k)^{m-2}$$

- При $l=3$, нарушителите, покрити еднократно, са 3. Тях можем да изберем по $\binom{k}{3}$ начина. По $m(m-1)(m-2)$ начина можем да изберем три елемента от домейна, които се изобразяват в тези три нарушителя; а не по $\binom{m}{3}$. С други думи, множителят е $\prod_{t=0}^{3-1}(m-t)$. Тъй като вече изпозлвахме три елемента от домейна, остават $m-3$ елемента от домейна, такива че за последния множител разглеждаме всички функциии от тях върху $(n-k)$-елементен кодомейн, които са на брой $(n-k)^{m-3}$. Събираемото става

$$\binom{k}{3}\left(\prod_{t=0}^{3-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-3}=\binom{k}{3}\times m(m-1)(m-2)\times(n-k)^{m-3}$$

- И така нататък.

С това обосновахме множителя

$$\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}\right)$$

Да разгледаме малък пример, по-малък от този в задачата. Нека домейнът има 8 елемента и кодомейнът има 4 елемента. Очевидно, двукратни сюрекции има. Техният брой е

$$\begin{aligned}
&+1\times(1\times1\times4^8)\\
&-4\times(1\times1\times3^8+1\times8\times3^7)\\
&+6\times(1\times1\times2^8+2\times8\times2^7+1\times8\times7\times2^6)\\
&-4\times(1\times1\times1^8+3\times8\times1^7+3\times8\times7\times1^6+1\times8\times7\times6\times1^5)\\
&+1\times(1\times1\times0^8+4\times8\times0^5+6\times8\times7\times0^6+4\times8\times7\times6\times0^5+1\times8\times7\times6\times5\times0^4)=\\
&2\,520
\end{aligned}$$

В три различни цвята са оцветени трите множителя на

$$\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}$$

И така, обосновахме формулата (1). Ако заместим m с 19 и n с 6 и извършим изчисленията, получаваме отговор $183\,421\,913\,875\,200$. Това е броят на начините за раздаване на подаръците.