Писмен изпит по ДС (поправка), 13. 02. 2015 г.

Име: _______________________________, ФН:_____, Спец./курс:_______

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1. В равнината е даден квадратът $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 5\}$. Релацията $R \subset S \times S$ е определена по следния начин:

$$R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 = x_2, \quad y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Да се докаже, че R е релация на еквивалентност и да се определи класът на еквивалентност на точката $(2, 4)$.

Задача 2. Дадено е множество A и функции $f : A \to A$ и $g : A \to A$, които са биекции. Известно е, че $\exists x_0 \in A : f(x_0) \neq g(x_0)$. Докажете, че $\exists x_1 \in A : x_1 \neq x_0,\ f(x_1) \neq g(x_1)$.

Задача 3. Нека $n \in N^+$ и $a_n = 2 + 8 + 24 + \ldots + n2^n$. Намерете формула за a_n, като съставите линейно рекурентно уравнение за a_n и го решите при подходящи начални условия.

Задача 4. Точките от една окръжност са оцветени в два цвята. Докажете, че съществува равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове, лежащи на окръжността.

Упътване: Впишете правилен петоъгълник в окръжността и разсъждавайте за цветовете на върховете му.

Задача 5. Нека графът B_n е n-мерният двоичен куб (върховете са всички n-мерни двоични вектори, два върха са свързани, ако векторите им се различават на точно една позиция). Дайте обосновани отговори на следните въпроси:

а) Колко ребра има най-късият път от връх $\alpha = 00\ldots0$ до връх $\beta = 11\ldots1$?

б) Какъв е броят на всички най-кратки пътища от връх α до връх β?

Задача 6. Напишете съвършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x, y, z) = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$.

Примерни решения

Задача 1. $((x\,;\,y)\,;\,(x\,;\,y)) \in R$ за всички x и y, защото $x = x$ и $y - y = 0 \in \mathbb{Z}$; затова релацията R е рефлексивна.

Ако $((x_1\,;\,y_1)\,;\,(x_2\,;\,y_2)) \in R$, то по определение $x_1 = x_2$ и $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$. Понеже равенството е симетрична релация, то $x_2 = x_1$. А тъй като противоположното на всяко цяло число е пак цяло число, то $-(y_1 - y_2) = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$. От $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$ и $x_2 = x_1$ следва, че $((x_2\,;\,y_2)\,;\,(x_1\,;\,y_1)) \in R$. Значи релацията R е симетрична.

Нека $((x_1\,;\,y_1)\,;\,(x_2\,;\,y_2)) \in R$ и $((x_2\,;\,y_2)\,;\,(x_3\,;\,y_3)) \in R$. Следователно $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$, $y_2 - y_3 \in \mathbb{Z}$. От транзитивността на равенството следва, че $x_1 = x_3$. Понеже сбор на две цели числа е отново цяло число, то получаваме: $(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) = y_1 - y_3 \in \mathbb{Z}$. От $x_1 = x_3$ и $y_1 - y_3 \in \mathbb{Z}$ следва, че $((x_1\,;\,y_1)\,;\,(x_3\,;\,y_3)) \in R$. Правим извод, че релацията R е транзитивна.

И така, R е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Следователно R е релация на еквивалентност.

Класът на еквивалентност на точката $(2\,;\,4)$ е множеството от всички точки $(x\,;\,y)$, за които $x = 2$ и $y - 4$ е цяло число, т.е. y е цяло число. Понеже $0 \le y \le 5$, то възможните стойности на y са числата $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Окончателно, търсеният клас на еквивалентност е множеството от шест точки $\{\,(2\,;0)\,,\ (2\,;1)\,,\ (2\,;2)\,,\ (2\,;3)\,,\ (2\,;4)\,,\ (2\,;5)\,\}$.

Задача 2. Нека $\overset{*}{y} = f(x_0)$. Тъй като $f: A \to A$, то $\overset{*}{y} \in A$. Понеже $g: A \to A$ е биекция (а значи и сюрекция), то $\exists x_1 \in A$, за което $\overset{*}{y} = g(x_1)$.

От веригата равенства и неравенства $g(x_1) = \overset{*}{y} = f(x_0) \ne g(x_0)$ следва, че $g(x_1) \ne g(x_0)$. За произволно изображение (в т.ч. и за даденото g) следва, че $x_1 \ne x_0$.

Остава да докажем, че $f(x_1) \ne g(x_1)$. Да допуснем противното: че $f(x_1) = g(x_1)$. Тогава $f(x_1) = g(x_1) = \overset{*}{y} = f(x_0)$, т.е. $f(x_1) = f(x_0)$. Понеже $f: A \to A$ е биекция (а значи и инекция), то $x_1 = x_0$, което противоречи на неравенството $x_1 \ne x_0$.

Задача 3. В равенството $a_n = 2 + 8 + 24 + \ldots + (n-1).2^{n-1} + n.2^n$ пишем $n{-}1$ вм. n и получаваме второ равенство: $a_{n-1} = 2 + 8 + 24 + \ldots + (n-1).2^{n-1}$. Изваждаме второто равенство от първото: $a_n - a_{n-1} = n.2^n$, тоест $a_n = a_{n-1} + n.2^n$ за всяко цяло $n \ge 2$. Това е търсеното линейно рекурентно уравнение. То е нехомогенно уравнение с фиксиран брой събираеми и с постоянни коефициенти (с изключение на свободния член, който е от специален вид: полином по експонента), затова може да се реши с помощта на характеристично уравнение: $\lambda^n = \lambda^{n-1}$, което след деление на $\lambda^{n-1} \ne 0$ дава $\lambda = 1$.

От свободния член $n.2^n$ идват две двойки (две, защото полиномът е от първа степен). Получава се мултимножеството $\{1;\ 2;\ 2\}_{\mathrm{M}}$. Следователно

$$a_n = C_1 . 1^n + C_2 . 2^n + C_3 . n . 2^n, \text{ т.е. } a_n = C_1 + C_2 . 2^n + C_3 . n . 2^n,$$

където коефициентите C_1, C_2, C_3 са неопределени. За да ги намерим, имаме нужда от три уравнения, т.е. от три начални условия.

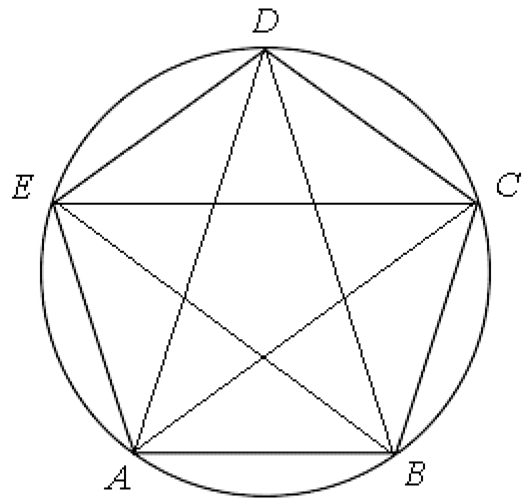
От дефиницията на a_n се вижда, че $a_1 = 2$, $a_2 = 2 + 8 = 10$ и $a_3 = 2 + 8 + 24 = 34$. Във формулата $a_n = C_1 + C_2 . 2^n + C_3 . n . 2^n$ заместваме n с 1, с 2 и с 3, при което получаваме следната система от линейни уравнения:

$$\left| \begin{array}{l} C_1 + 2C_2 + \ \ 2C_3 = \ \ 2 \\ C_1 + 4C_2 + \ \ 8C_3 = 10 \\ C_1 + 8C_2 + 24C_3 = 34 \end{array} \right.$$

Като я решим, намираме $C_1 = 2$, $C_2 = -2$, $C_3 = 2$. Заместваме във формулата за a_n:

$a_n = 2 - 2 . 2^n + 2n . 2^n$, т.е. $\boxed{a_n = (n-1) . 2^{n+1} + 2}$ за всяко цяло положително n.

Задача 4. В дадената окръжност вписваме правилен петоъгълник $ABCDE$.



Прилагаме принципа на Дирихле: цветовете са чекмеджета (две на брой), а върховете са предмети (пет на брой). Тъй като 5 **:** 2 = 2 остатък 1, то следва, че поне три от върховете на петоъгълника са оцветени в един и същи цвят. Тези три върха образуват равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове.

Причината е, че всеки три върха на правилен петоъгълник образуват равнобедрен триъгълник. Това се доказва така:

От върховете на петоъгълника се образуват $C_5^3 = 10$ триъгълника.

Пет от тях — $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ — съдържат по две страни на петоъгълника. Тези пет триъгълника са равнобедрени, тъй като всеки две страни на правилния петоъгълник са равни (например за $\triangle ABC$ имаме $AB = BC$).

Останалите пет триъгълника — $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle CDA$, $\triangle DEB$, $\triangle EAC$ — съдържат по два диагонала на петоъгълника и също са равнобедрени, защото всеки два диагонала на правилния петоъгълник са равни (например за $\triangle ABD$ имаме $AD = DB$).

И така, които и три върха на правилен петоъгълник да вземем, те ще образуват равнобедрен триъгълник. Всеки от петте върха е оцветен в един от два възможни цвята, затова поне три върха са оцветени в един и същи цвят. Тези три върха образуват равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове.

Задача 5.

а) При преминаване по ребро настъпва промяна в точно една координата. Тъй като върховете $\alpha = 00...0$ и $\beta = 11...1$ се различават във всичките си n координати, то нужни са най-малко n промени. Затова не съществува път от $\alpha = 00...0$ до $\beta = 11...1$ с дължина, по-малка от n. Един възможен път с дължина n е следният:

$\alpha = 00...0$ — $10...0$ — $11...0$ — ... — $\beta = 11...1$,

при който се променя първо първата координата, после — втората, после — третата и т.н. до n-тата координата включително.

Отговор: а) $\boxed{\text{Дължината на най-късия път от } \alpha \text{ до } \beta \text{ е равна на } n.}$

б) Всички най-кратки пътища от α до β имат дължина n. Следователно за всеки от най-кратките пътища всяка координата на текущия връх се променя точно веднъж. Затова на всеки най-кратък път от α до β можем да съпоставим редица $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, където a_k е номерът на координатата, променена на k-тата стъпка, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Например за пътя с дължина n от подусловие "а" редицата е $1, 2, 3, \ldots, n$. За произволен най-кратък път всички членове на редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ са номера на координати, т.е. цели числа от 1 до n (вкл.); при това, членовете на редицата са два по два различни, тъй като всяка координата се променя точно веднъж. Следователно всяка редица от описания вид е пермутация на целите числа от 1 до n (вкл.).

И така, на всеки най-кратък път от α до β съответства пермутация на целите числа от 1 до n (вкл.).

Обратно, на всяка пермутация $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ на целите числа от 1 до n (вкл.) съответства най-кратък път от α до β, а именно: пътят, при който първо се променя координата № a_1, след това — координата № a_2, после — координата № a_3 и т.н. На последната стъпка се променя координата № a_n. (Пътят е най-кратък, защото има най-малката възможна дължина: n.)

Показахме, че съществува взаимноеднозначно изображение между множеството на най-кратките пътища от α до β и множеството на пермутациите на целите числа от 1 до n (вкл.). Следователно най-кратките пътища са толкова на брой, колкото са пермутациите на n елемента: $P_n = n!$

Отговор: б) $\boxed{\text{Броят на най-кратките пътища от върха } \alpha \text{ до върха } \beta \text{ е равен на } n!}$

Задача 6. Съвършената ДНФ на булевата функция $f = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$ може да бъде намерена по два начина: чрез преобразуване на дадената формула или чрез построяване на таблицата на дадената функция f. Тук ще използваме таблица.

x	y	z	$x \to y$	$x \oplus z$	$f = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Единиците означават логическата стойност истина (true), а нулите — неистина (false).

От втория, четвъртия и седмия ред на таблицата получаваме съвършената ДНФ на f:

$\boxed{f = \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z}}$.

Полиномът на Жегалкин също може да се намери по два начина: чрез преработване на получената съвършена ДНФ или чрез преработване на формулата, дадена в условието. И двата начина са верни, но по-лесен е вторият.

И така, $f = (x \to y) \wedge (x \oplus z)$ по условие. Заменяме импликацията: $x \to y = \overline{x} \vee y$, а дизюнкцията — по един от законите на Август де Морган: $\overline{x} \vee y = \overline{x\,\overline{y}}$. Както е прието при работа с полиномите на Жегалкин, пишем + вместо $\oplus$ и точка вместо $\wedge$ (или без знак).

Получаваме $f = \left(\overline{x\,\overline{y}}\right) . (x + z)$. Заместваме отрицанието по формулата $\overline{x} = x + 1$.

Следователно $f = \big(x.(y+1)+1\big) . (x+z)$. Разкриваме скобите и опростяваме получения израз чрез законите за поглъщане: $x\,x = x$ и $x + x = 0$.

$$f = x\,x(y+1) + x(y+1)z + x + z = x(y+1) + x(y+1)z + x + z\,,$$

$$f = x\,y + \cancel{x} + x\,y\,z + x\,z + \cancel{x} + z = x\,y\,z + x\,y + x\,z + z\,.$$

Окончателно, $\boxed{f = x\,y\,z + x\,y + x\,z + z}$ е полиномът на Жегалкин на функцията f.