Домашно №2 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2015г.

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6** *бонус*	**Макс.**
получени точки							
от максимално	15	15	15	15	12	15	72

Задача 1: (15т.) Докажете по индукция, че за всяко естествено число $n \geq 2$ е в сила следното твърдение: *всеки двоичен низ с дължина n, който започва с 0 и завършва с 1, съдържа подниз 01.*

Задача 2: (15т.) Рекурентната редица е определена по следния начин:
$A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 4, A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} + A_{n-3}, n \geq 3$
Използвайте метода на силната индукция, за да докажете, че
$A_n \leq (2.2)^n, n \in \mathbb{N}$

Задача 3: (15т.) Нека $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Докажете, че релацията
$R_{\preceq} \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n)) \in R_{\preceq} \Leftrightarrow \forall i \in I_n, a_i \leq b_i\}$,
е релация на *частична наредба*, но не е релация на *пълна наредба*. Представете релацията чрез диаграма на Хасе за $n = 2, 3$.

Задача 4: (15т.) Нека A е произволно множество, $R \subseteq A \times A$ е симетрична и транзитивна релация, а $P(x, y) : \forall x \exists y (xRy)$ е предикат с домейн A.

а)(6т.) Проверете, дали R притежава свойството рефлексивност;

б)(9т.) Докажете, че ако R удовлетворява $P(x, y)$, то R е релация на еквивалентност.

Задача 5: (12т.) Функцията $f : J_8 \to J_8$ е дефинирана по следния начин: $f(x) = 5x \bmod 8$.

Докажете, че f е биекция и намерете обратната функция f^{-1}.

Задача 6: (15т.) Нека X е произволно множество, а $R_{\preceq} \subseteq X \times X$ е релация на частична наредба. Функцията $f : X \to X$ е *монотонна*, ако $\forall x \forall y (x \preceq y \to f(x) \preceq f(y))$.

Проверете дали всяка от следващите функции е монотонна:

а)(6т.) $X = \mathbb{N}, R_{\preceq} = \{(a, b) : a|b\}, \quad f(x) = x^2$

б)(9т.) $X = 2^A, R_{\preceq} = \{(a, b) : a \subseteq b\}, \quad f(x) = A \setminus x$, където A е произволно множество.