Упражнение 1 (асимптотични нотации)

Def: Ще казваме, че функцията $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е *асимптотично неотрицателна*, ако:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: f(n) \geq 0$$

Ако неравенството е строго, ще казваме, че f е *асимптотично положителна.*

Def: Нека g е асимптотично неотрицателна фукция. Въвеждаме следните класове от функции (ще ги наричаме *асимптотични нотации*):

$$\mathrm{O}(g) = \{f \mid \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq f(n) \leq c.g(n)\}$$

$\mathrm{O}(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично не по-бързо* от g. Ще записваме това като $f \in \mathrm{O}(g)$, $f = \mathrm{O}(g)$ или $f \preccurlyeq g$.

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq c.g(n) \leq f(n)\}$$

$\Omega(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично не по-бавно* от g. Ще записваме това като $f \in \Omega(g), f = \Omega(g)$ или $f \succcurlyeq g$.

$$o(g) = \{f \mid \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq f(n) < c.g(n)\}$$

$o(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично по-бавно* от g. Ще записваме това като $f \in o(g), f = o(g)$ или $f \prec g$.

$$\omega(g) = \{f \mid \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq c.g(n) < f(n)\}$$

$\omega(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично по-бързо* от g. Ще записваме това като $f \in \omega(g), f = \omega(g)$ или $f \succ g$.

$$\Theta(g) = \{f \mid \exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)\}$$

$\Theta(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично еднакво* с g. Ще записваме това като $f \in \Theta(g)$, $f = \Theta(g)$ или $f \asymp g$.

Някои основни свойства на асимптотичните нотации:

Свойство 1: Всички са транзитивни: Ако $f\ \sigma\ g$ и $g\ \sigma\ h$, то $f\ \sigma\ h$, за $\sigma \in \{\prec, \succ, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \asymp\}$

Свойство 2: Θ, O и Ω са рефлексивни: $f\ \sigma\ f$ за $\sigma \in \{\preccurlyeq, \succcurlyeq, \asymp\}$

Свойство 3: $f \succcurlyeq g$ и $g \succcurlyeq f \Leftrightarrow f \asymp g$

Свойство 4: Θ е симетрична: $f \asymp g \Rightarrow g \asymp f$

Свойство 5: $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow g \succcurlyeq f$ и $f \prec g \Leftrightarrow g \succ f$

Доказателствата на тези свойства са по дефинициите. Например:

Симетричност на Θ:
Нека $f = \Theta(g)$, тоест:

$$\exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1 . g(n) \leq f(n) \leq c_2 . g(n)$$

От неравенство имаме: $0 \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} . f(n)$ и $0 \leq \frac{1}{c_2} . f(n) \leq g(n)$, откъдето:

$$0 \leq \frac{1}{c_2} . f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} . f(n) \Rightarrow g = \Theta(f)$$

Транзитивност на o:
Нека $f = o(g)$ и $g = o(h)$, тоест:

$$\forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c . g(n)$$

$$\forall d > 0\ \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m_0 : 0 \leq g(n) < d . h(n)$$

Фиксираме $c = 1$ и получаваме:

$$\forall d > 0\ \forall n \geq \max\{m_0, n_0\} : 0 \leq f(n) < g(n) < d . h(n) \Rightarrow f = o(h)$$

Свойство 6: $\max\{f, g\} \asymp f + g$

Ако за дадено n: $f(n) \geq g(n)$, то:

$$\frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} g(n) \leq f(n) = \max\{f(n), g(n)\}$$

Ако пък $f(n) < g(n)$, то:

$$\frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} g(n) < g(n) = \max\{f(n), g(n)\}$$

И в двата случая:

$$\frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\}$$

Тъй като f и g са асимптотично неотрицателни, то:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k_0 : f(n) \geq 0 \text{ и } \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m_0 : g(n) \geq 0$$

Сега имаме:

$$\forall n \geq \max\{k_0, m_0\} : \frac{1}{2} f(n) + \frac{1}{2} g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \max\{f, g\} \asymp f + g$$

Свойство 7: За асимптотично положителни f и g е вярно, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \ \Leftrightarrow \ f = o(g)$$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \ \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon$$

Тъй като f и g са асимптотично положителни, то:

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq k_0 : f(n) > 0 \text{ и } \exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m_0 : g(n) > 0$$

Сега имаме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq \max\{n_0, k_0, m_0\} : -\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon \ \leftrightarrow \ 0 \leq f(n) < \varepsilon . g(n)$$

, което е точно еквивалентността на двете дефиниции.

Свойство 8: За асимптотично положителни f и g е вярно, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \ \Rightarrow \ f = \Theta(g)$$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \ \Rightarrow \ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon$$

Фиксираме ε, така че $c - \varepsilon > 0$
Освен това g е асимптотично положителна, така че: $\exists m_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m_0 : g(n) > 0$
Сега имаме:

$$\forall n \geq \max\{n_0, m_0\} : 0 < (c - \varepsilon). g(n) < f(n) < (c + \varepsilon). g(n)$$

или в частност:

$$\forall n \geq \max\{n_0, m_0\} : 0 \leq (c - \varepsilon). g(n) \leq f(n) \leq (c + \varepsilon). g(n) \ \Rightarrow \ f = \Theta(g)$$

Забележете, че обратното не е вярно:

$$f = \Theta(g) \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0$$

Нека $f(n) = (2 + \sin n).n$, а $g(n) = n$

Очевидно $\forall n \geq 1: n \leq (2 + \sin n).n \leq 3n \Rightarrow f = \Theta(g)$, но от друга страна границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2 + \sin n).n}{n} = \lim_{n\to\infty} (2 + \sin n)$$

изобщо не съществува.

Забележка 1: Със символът $\lg n$ ще обозначаваме двоичен логаритъм, а не десетичен!

Забележка 2: Тъй като $\log_a n$ и $\log_b n$ за $a, b > 1$ се различават само с положителна константа:

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

, много често няма да обозначаваме основата. Например: $\Theta(\lg n) = \Theta(\log n)$.

Свойство 9: Нека f и g са асимптотично положителни и $a > 1$.

Ако $f \prec g$ и g расте неограничено, то $a^f \prec a^g$

Ако $\log_a f \prec \log_a g$ и g расте неограничено, то $f \prec g$

Тук е от особено значение, че g расте неограничено! Да разгледаме следния пример:

$$f(n) = \frac{1}{n}, \qquad g(n) = 1 - \frac{1}{n}$$

Тъй като:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 0$$

, то $f \prec g$

От друга страна:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

, така че $2^f \asymp 2^g$

Аналогично се показва и за логаритъма.

Свойство 10:

$$\forall a > 1\ \forall t > 0\ \forall \varepsilon > 0: \log_a^t n \prec n^{\varepsilon}$$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{\frac{\varepsilon}{t}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{\varepsilon}{t}}}$$

От правилото на Лопитал имаме:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{\varepsilon}{t}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \ln a \frac{\varepsilon}{t} x^{\frac{\varepsilon}{t}-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\varepsilon \ln a\, x^{\frac{\varepsilon}{t}}} = 0$$

Сега:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log_a n}{n^{\frac{\varepsilon}{t}}}\right)^t = 0^t = 0 \Rightarrow \log_a^t n \prec n^{\varepsilon}$$

Пример 1:

$10^4 n^2 \prec 10^{-4} n^3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10^4 n^2}{10^{-4} n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^8}{n} = 0 \Rightarrow 10^4 n^2 \prec 10^{-4} n^3$$

Пример 2:

Нека $p(x)$ е полином от степен k с положителен старши коефицент. Тогава $p(n) \asymp n^k$.

$$p(n) = \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ \dots + \alpha_k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ \dots + \frac{\alpha_k}{n^k} = \alpha_0 > 0 \Rightarrow p(n) \asymp n^k$$

Пример 3:

За фиксирано $k \in \mathbb{N}$ е вярно, че:

$$\binom{n}{k} \asymp n^k$$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} . \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{k!.\, n^k} = \lim_{n\to\infty} 1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} \asymp n^k$$

Пример 4:

$(n+1)^n \asymp n^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow (n+1)^n \asymp n^n$$

Пример 5:

Не всеки две асимптотично неотрицателни функции са асимптотично сравними.

Например:

$$g(n) = n, \qquad f(n) = \begin{cases} 1 & ,n \text{ е четно} \\ n^2 & ,n \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Ако допуснем, че $f = O(g)$, ще имаме:

$$\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq f(n) \leq c.g(n)$$

, което не е вярно за нечетни $n > c$ ($0 \leq n^2 \leq c.n$)

Ако допуснем, че $g = O(f)$, ще имаме:

$$\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq g(n) \leq c.f(n)$$

, което не е вярно за четни $n > c$ ($0 \leq n \leq c$)

Щом f и g са несравними по O, те не са сравними изобщо.

Пример 6:

Възможно е $f = O(g)$, без да е вярно нито едно от $f = o(g)$ и $f = \Theta(g)$.

Например:

$$g(n) = n, \qquad f(n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & ,n \text{ е четно} \\ n & ,n \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Вярно е, че $f = O(g)$, тъй като $\forall n \geq 1: 0 \leq f(n) \leq g(n)$

Ако допуснем, че $f = o(g)$, ще имаме:

$$\forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq f(n) < c.g(n)$$

, което не е вярно за нечетни n и $c \leq 1$ ($0 \leq n < c.n$)

Ако допуснем, че $f = \Theta(g)$, ще имаме:

$$\exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: 0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$$

, което не е вярно за четни $n > \frac{1}{\sqrt{c_1}}$ ($0 \leq c_1.n \leq \frac{1}{n}$)