Упражнение 2 (асимптотично сравнение на функции)

Апроксимация на Стирлинг:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Пример 1:

$\lg n! \asymp n\lg n$

От апроксимацията на Стирлинг имаме:

$$\lg n! \approx \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = \lg\sqrt{2\pi n} + n\lg n - n\lg e \asymp n\lg n$$

Пример 2:

$$\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

От апроксимацията на Стирлинг имаме:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\frac{1}{\pi n}}\,4^n \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

Задача 1: Докажете, че $1 \prec \lg\lg n \prec \lg n \prec n \prec n\lg n \prec n^2 \prec n^3 \prec 2^n \prec n! \prec n^n$

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg\lg n} = 0 \;\Rightarrow\; 1 \prec \lg\lg n$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg\lg n}{\lg n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\lg\lg x}{\lg x}$$

От правилото на Лопитал имаме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg\lg x}{\lg x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lg x}.\frac{(\lg x)'}{(\lg x)'} = 0 \;\Rightarrow\; \lg\lg n \prec \lg n$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\lg x}{x}$$

От правилото на Лопитал имаме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \lg n \prec n$$

4.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\lg n}=0\ \Rightarrow\ n\prec n\lg n$$
5.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\lg n}{n^2}=0\ \Rightarrow\ n\lg n\prec n^2$$
6.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0\ \Rightarrow\ n^2\prec n^3$$
7.
Тъй като $\lg(n^3)=3\lg n\prec n\lg 2=\lg(2^n)$, то $n^3\prec 2^n$

8.
Тъй като $\lg(2^n)=n\lg 2\prec n\lg n\asymp \lg(n!)$, то $2^n\prec n!$

9.
Тъй като $\forall n\in\mathbb{N}: 0<n!\leq n^{n-1}$, то:
$$\forall n\in\mathbb{N}: 0<\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n}$$

От лемата за „двамата полицаи“ имаме:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\ \Rightarrow\ n!\prec n^n$$

Задача 2: Докажете, че $\sqrt[n]{n}\asymp 1$

Използваме следната лема:
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a>0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\ln a$$

Сега имаме:
$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1}=e^0=1\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{n}\asymp 1$$

Задача 3: Подредете в асимптотично нарастващ ред функциите:

$$\sqrt{2}^{\lg n},\quad n^3,\quad n!,\quad (\lg n)!,\quad \lg^2 n,\quad \lg n!,\quad 2^{2^n},\quad n^{\frac{1}{\lg n}},\quad \ln\ln n,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$n.2^n,\quad 4^{\lg n},\quad (n+1)!,\quad \sqrt{\lg n},\quad 2^{\sqrt{2.\lg n}},\quad n^{\lg\lg n},\quad \ln n,\quad 2^{\lg n},\quad (\lg n)^{\lg n}$$

Правилният ред е:
$$n^{\frac{1}{\lg n}}\prec\ln\ln n\prec\sqrt{\lg n}\prec\ln n\prec\lg^2 n\prec 2^{\sqrt{2.\lg n}}\prec\sqrt{2}^{\lg n}\prec 2^{\lg n}\prec\lg n!\prec 4^{\lg n}\prec n^3\prec(\lg n)!\prec$$
$$\prec(\lg n)^{\lg n}\asymp n^{\lg\lg n}\prec\left(\frac{3}{2}\right)^n\prec n.2^n\prec n!\prec(n+1)!\prec 2^{2^n}$$

Решение:

1.

$$n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\log_n 2} = 2 \prec \ln \ln n$$

2.

$$\ln \ln n \prec \sqrt{\lg n}$$

, тъй като $\sqrt{\lg n} \asymp \sqrt{\ln n}$ и $\ln \ln n \prec \sqrt{\ln n}$, аналогично на $\ln n \prec \sqrt{n}$

3.

$$\sqrt{\lg n} \asymp \sqrt{\ln n} \prec \ln n, \text{ тъй като } 1 \prec \sqrt{\ln n}$$

4.

$$\ln n \prec \lg^2 n, \text{ тъй като } \ln n \prec \ln^2 n \asymp \lg^2 n$$

5.

$$\lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2.\lg n}}$$

Тъй като $\lg(\lg^2 n) = 2 \lg \lg n \prec \sqrt{2. \lg n} \lg 2 = \lg\left(2^{\sqrt{2.\lg n}}\right)$, то $\lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2.\lg n}}$

6.

$$2^{\sqrt{2.\lg n}} \prec \sqrt{2}^{\lg n}$$

Тъй като $\lg\left(2^{\sqrt{2.\lg n}}\right) = \sqrt{2. \lg n} \lg 2 \prec \frac{1}{2} \lg n = \lg(\sqrt{n}) = \lg \sqrt{2}^{\lg n}$, то $2^{\sqrt{2.\lg n}} \prec \sqrt{2}^{\lg n}$

7.

$$\sqrt{2}^{\lg n} = \sqrt{n} \prec n = 2^{\lg n}$$

8.

$$2^{\lg n} = n \prec n \lg n \asymp \lg n!$$

9.

$$\lg n! \asymp n \lg n \prec n^2 = 4^{\lg n}$$

10.

$$4^{\lg n} = n^2 \prec n^3$$

11.

$$n^3 \prec (\lg n)!$$

Тъй като $\lg n^3 = 3 \lg n \prec \lg n \lg \lg n \asymp \lg(\lg n)!$, то $n^3 \prec (\lg n)!$

12.

$$(\lg n)! \prec (\lg n)^{\lg n}, \text{ аналогично на } n! \prec n^n$$

13.

$$(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$$

Това е заради свойството на логаритъма: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

14.

$$n^{\lg \lg n} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Тъй като $\lg\left(n^{\lg \lg n}\right) = \lg \lg n \,.\, \lg n \prec \lg^2 n \prec n \lg \frac{3}{2} = \lg \left(\frac{3}{2}\right)^n$, то $n^{\lg \lg n} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n$

15.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \prec 2^n \prec n.\, 2^n$$

16.

$$n.\, 2^n \prec n!$$

Тъй като $\lg n.\, 2^n = \lg n + n \lg 2 \prec n \lg n \asymp \lg(n!)$, то $n.\, 2^n \prec n!$

17.

$$n! \prec (n+1)!$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \;\Rightarrow\; n! \prec (n+1)!$$

18.

$$(n+1)! \prec 2^{2^n}$$

Тъй като $\lg(n+1)! \asymp (n+1).\lg(n+1) \prec (n+1)^2 \prec 2^n \lg 2 = \lg\left(2^{2^n}\right)$, то $(n+1)! \prec 2^{2^n}$