**Упражнение 5** (рекурентни уравнения чрез разписване, хар. у-ние, дърво)

Условието на всички примери е да се намери сложността на рекурентното уравнение.

Ще считаме, че $T(0)$ се изпълнява за константно време.

**Пример 1**:

$$T(n) = 4T(n-2) + n.2^n + 4.3^n$$

От хомогенната част на това уравнение имаме:

$$x^2 - 4 = 0, x = \pm 2 \;\Rightarrow\; \{2, -2\}_m$$

От нехомогенната част имаме $\{2,2\}_m$ от $n.2^n$ и $\{3\}_m$ от $4.3^n$

Общото решение има вида:

$$T(n) = c_1 3^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n + c_4 n^2 2^n + c_5(-2^n) = \Theta(3^n),\ \text{където } c_1 > 0$$

**Пример 2**:

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$$

От хомогенната част на това уравнение имаме:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, x_{1,2} = 1 \;\Rightarrow\; \{1, 1\}_m$$

Общото решение има вида:

$$T(n) = c_1 1^n + c_2 n.1^n = \Theta(n),\ \text{където } c_2 > 0$$

**Пример 3**:

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

Последователно разписваме изразите за $T(n)$:

1) $T(n) = T(n-1) + 1$
2) $T(n-1) = T(n-2) + 1$

Заместваме $T(n-1)$ в 1) с израза от 2) и получаваме: $T(n) = T(n-2) + 2$. Аналогично, заместваме $T(n-2)$ с $T(n-3) + 1$ и получаваме: $T(n) = T(n-3) + 3$.

След $n-1$ замествания ще имаме $T(n) = T(0) + n = \Theta(n)$

**Пример 4**:

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Последователно разписваме изразите за $T(n)$:

1) $T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$
2) $T(n-1) = T(n-2) + \frac{1}{n-1}$

Заместваме $T(n-1)$ в 1) с израза от 2) и получаваме:

$$T(n) = T(n-2) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$$

Аналогично, заместваме $T(n-2)$ с $T(n-3) + \frac{1}{n-2}$ и получаваме:

$$T(n) = T(n-3) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}$$

След $n-1$ замествания ще имаме:

$$T(n) = T(0) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ \dots\ + \frac{1}{1} = T(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\ln n)$$

**Пример 5**:

$$T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n}$$

Последователно разписваме изразите за $T(n)$:

1) $T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n}$
2) $T(n-1) = 2T(n-2) + \frac{1}{n-1}$

Заместваме $T(n-1)$ в 1) с израза от 2) и получаваме:

$$T(n) = 4T(n-2) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1}$$

Аналогично, заместваме $T(n-2)$ с $2T(n-3) + \frac{1}{n-2}$ и получаваме:

$$T(n) = 8T(n-3) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{4}{n-2}$$

След $n-1$ замествания ще имаме:

$$T(n) = 2^n T(0) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{4}{n-2} + \ \dots\ + \frac{2^{n-1}}{1} = 2^n . T(0) + 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i . 2^i} = \Theta(2^n)$$

, тъй като:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i.2^i} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \;\Rightarrow\; 2^n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i.2^i} < 2^n$$

**Пример 6**:

$$T(n) = \frac{n}{n+1}T(n-1)+1$$

Последователно разписваме изразите за $T(n)$:

1) $T(n) = \frac{n}{n+1}T(n-1)+1$
2) $T(n-1) = \frac{n-1}{n}T(n-2)+1$

Заместваме $T(n-1)$ в 1) с израза от 2) и получаваме:

$$T(n) = \frac{n-1}{n+1}T(n-2)+1+\frac{n}{n+1}$$

Аналогично, заместваме $T(n-2)$ с $\frac{n-2}{n-1}T(n-3)+1$ и получаваме:

$$T(n) = \frac{n-2}{n+1}T(n-3)+1+\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}$$

След $n-1$ замествания ще имаме:

$$T(n) = \frac{1}{n+1}T(0)+1+\frac{n}{n+1}+\frac{n-1}{n+1}+\;\dots\;+\frac{2}{n+1} = \frac{1}{n+1}.T(0)+\frac{1}{n+1}\sum_{i=2}^{n+1} i =$$

$$= \frac{1}{n+1}.T(0)+\frac{1}{n+1}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right) = \Theta(n)$$

**Пример 7**:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n})+1$$

Представяме $n$ във вида $2^{2^m}$ ( $m = \lg\lg n$ )

Сега имаме:

$$S(m) = T\left(2^{2^m}\right) = 2T\left(2^{2^{m-1}}\right)+1$$

или $S(m) = 2S(m-1)+1$

Сложността на това уравнение е $\Theta(2^m)$, което спрямо $n$ е $\Theta\left(2^{\lg\lg n}\right) = \Theta(\lg n)$

**Пример 8**:

$$T(n) = T\left(\sqrt{n}\right) + 1$$

Представяме $n$ във вида $2^{2^m}$ ( $m = \lg\lg n$ )

Сега имаме:

$$S(m) = T\left(2^{2^m}\right) = T\left(2^{2^{m-1}}\right) + 1$$

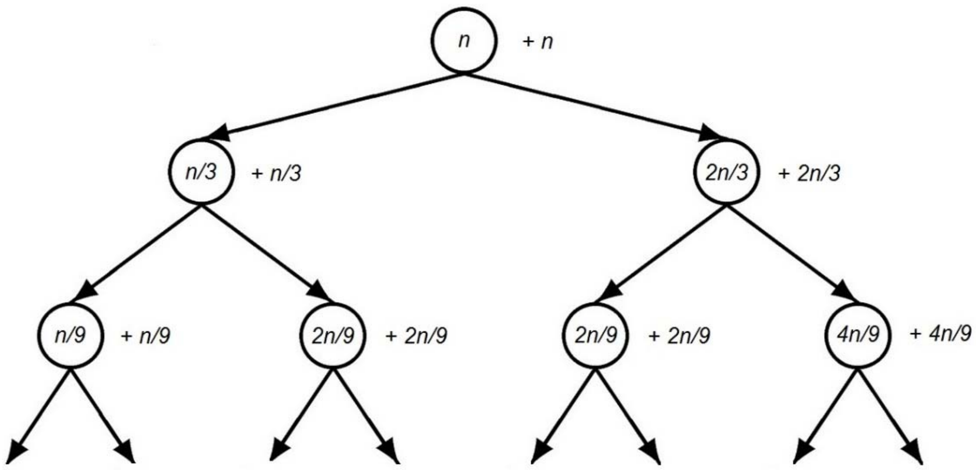
или $S(m) = S(m-1) + 1$

Сложността на това уравнение е $\Theta(m)$, което спрямо $n$ е $\Theta(\lg\lg n)$

**Пример 9**:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

Да разгледаме фрагмент от дървото на извод за $T(n)$:




Върховете на това дърво представляват стойностите на $n$ за съответното рекурсивно извикване. Отстрани е написана допълнителната сложност към всеки връх.

Забелязва се, че на всяко ниво от това дърво, общата сложност е $n$, така че цялата сложност на уравнението зависи от броя на нивата и сложността на всеки връх.

Лявото и дясното поддърво обаче не са с една и съща височина.

Височината на най-дясното листо е $\log_{\frac{3}{2}} n$ или ако дървото беше пълно, то цялата сложност щеше да е $n \log_{\frac{3}{2}} n$.

Така получаваме горна граница за сложността на уравнението - $O(n \log n)$.

Височината на най-лявото листо е $\log_3 n$. До тази височина дървото е пълно, откъдето получаваме долна граница за сложността на уравнението - $\Omega(n \log n)$.

В такъв случай $T(n) = \Omega(n \log n)$ и $T(n) = O(n \log n)$, откъдето $T(n) = \Theta(n \log n)$.