

Интегрален критерий за суми

I. Какво представлява критерият:

Имаме асимптотично положителна функция $f(x)$, положителна от n_0 нататък и за $n > n_0$ искаме да покажем следното:

$$\sum_{i=n_0}^n f(i) \approx \int_{n_0}^n f(x) dx$$

II. За какви функции е в сила:

Ще разгледаме само някои частни случаи, при които критерият е приложим. В действителност, той е приложим за по-широк клас от функции, но доказателството на това минава през специални функции от комплексния анализ.

Нека f е асимптотично положителна функция:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: f(n) > 0$$

Освен това ще искаме тя да е така да се каже „равномерно разпределена“ между естествени и реални числа:

$$\exists m > 0 \exists M > 0 \forall n \geq n_0: m \cdot f(n) \leq \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq M \cdot f(n)$$

Ето няколко примера:

Пример 1: $f(x) = x^2$

За всеки интервал от вида $[n, n+1]$ минимумът на f се достига в точка n и той е точно n^2 , а максимумът се достига в точка $n+1$ и той е $(n+1)^2$.

Сега имаме тривиалното неравенство:

$$\forall n \geq 1: 1 \cdot n^2 \leq n^2 = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = (n+1)^2 \leq 4 \cdot n^2$$

Това е горната дефиниция с $m = 1$ и $M = 4$.

Пример 2: Изобщо за $f(x) = x^\alpha$

При $\alpha \geq 0$ имаме:

$$\forall n \geq 1: 1 \cdot n^\alpha \leq n^\alpha = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = (n+1)^\alpha \leq 2^\alpha \cdot n^\alpha$$

При $\alpha < 0$ имаме:

$$\forall n \geq 1: 2^\alpha \cdot n^\alpha \leq (n+1)^\alpha = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) < \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = n^\alpha \leq 1 \cdot n^\alpha$$

Пример 3: $f(x) = \alpha^x$

При $\alpha \geq 1$ имаме:

$$\forall n \geq 1: 1 \cdot \alpha^n \leq \alpha^n = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = \alpha^{n+1} \leq \alpha \cdot \alpha^n$$

При $0 < \alpha < 1$ имаме:

$$\forall n \geq 1: \alpha \cdot \alpha^n \leq \alpha^{n+1} = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) < \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = \alpha^n \leq 1 \cdot \alpha^n$$

Пример 4: $f(x) = x^x$

Това е пример за функция, която не е такава!

$$\forall n \geq 1: 1 \cdot n^n \leq n^n = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = (n+1)^{n+1} \leq M \cdot n^n$$

Такова M обаче няма, тъй като:

$$\forall M > 0 \exists n_m \in \mathbb{N} \forall n \geq n_m: (n+1) \cdot (n+1)^n \geq (n+1) \cdot n^n \geq M \cdot n^n$$

III. Доказателство:

Да напишем отново свойствата на f :

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0: f(n) > 0$
2. $\exists m > 0 \exists M > 0 \forall n \geq n_0: m \cdot f(n) \leq \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq M \cdot f(n)$

Нека сега $n > n_0$. Второто свойство е вярно за всички $i = n_0, n_0 + 1, \dots, n - 1$.

Имаме:

$$m \cdot f(i) \leq \min_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq \max_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq M \cdot f(i)$$

Сумираме по всички такива i и получаваме:

$$m \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \min_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \max_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq M \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

Двете суми в средата представляват суми на Дарбу за интервала $[n_0, n]$ и диаметър на разбиване 1.

Между тях се намира съответният интеграл:

$$m \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \min_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq \int_{n_0}^n f(x) dx \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \max_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq M \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

Това определя, че:

$$\int_{n_0}^n f(x) dx = \Theta \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \right)$$

, което поради рефлексивността на Θ , може да се запише и като:

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) = \Theta \left(\int_{n_0}^n f(x) dx \right)$$

(Забележка: Критерият може да се използва и в този вид! Така той дава по-добра точност на апроксимацията!)

Остава да направим прехода от сума за $n - 1$ към сума за n . Имаме следното:

$$m \cdot f(i) \leq \min_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq f(i+1) \leq \max_{x \in [i, i+1]} f(x) \leq M \cdot f(i)$$

Отново сумираме по $i = n_0, \dots, n - 1$, след което прибавяме положителното $f(n_0)$:

$$\begin{aligned} m \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) &\leq \sum_{i=n_0+1}^n f(i) \leq M \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \Rightarrow \\ \Rightarrow m \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) &\leq m \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + f(n_0) \leq \sum_{i=n_0}^n f(i) \leq M \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + f(n_0) \leq (M+1) \cdot \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \end{aligned}$$

Кое то пък определя, че:

$$\sum_{i=n_0}^n f(i) = \Theta \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \right)$$

Сега от транзитивността на Θ имаме:

$$\sum_{i=n_0}^n f(i) = \Theta \left(\int_{n_0}^n f(x) dx \right)$$

IV. Приложения:

Пример 1:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \asymp \ln n$$

Тази сума е за функция от вида x^α , а за нея вече видяхме, че са изпълнени исканите свойства.

В случая $\alpha = -1$ и имаме:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \Theta\left(\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n\right)$$

Пример 2:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \asymp \sqrt{n}$$

Тази сума е за $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} = \Theta\left(\int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{n} - 2\right) = \Theta(\sqrt{n})$$

Пример 3:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \asymp 1$$

Тази сума е за $f(x) = x^{-2}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \Theta\left(\int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n}\right) = \Theta(1)$$

Изобщо, за x^α имаме:

$$\sum_{i=1}^n i^\alpha = \Theta\left(\int_1^n x^\alpha dx\right) = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha+1}) & , \alpha > -1 \\ \Theta(\ln n) & , \alpha = -1 \\ \Theta(1) & , \alpha < -1 \end{cases}$$

Пример 4:

$$\sum_{i=1}^n \ln i \asymp n \ln n$$

Функцията $\ln x$ е положителна за $n \geq 2$. Тъй като $\ln 1 = 0$, то първият сумант може да се пропусне. Да разгледаме дали са изпълнени исканите свойства:

$\ln x$ е растяща функция, така че за всеки интервал от вида $[n, n + 1]$:

$$\min_{x \in [n, n+1]} \ln x = \ln n, \quad \max_{x \in [n, n+1]} \ln x = \ln(n + 1)$$

Освен това $\ln(n + 1) < \ln n^2 = 2 \ln n$ за всяко $n \geq 2$, така че:

$$\forall n \geq 2: \ln n \leq \ln n = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = \ln(n + 1) \leq 2 \ln n$$

Сега прилагаме критерия и получаваме:

$$\sum_{i=2}^n \ln i = \Theta \left(\int_2^n \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_2^n \right) = \Theta(n \ln n)$$

По този начин може да се докаже и че $\ln n! \asymp n \ln n$, тъй като сумата от ляво представлява точно $\ln n!$:

$$\sum_{i=2}^n \ln i = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n = \ln n!$$

Пример 5:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln i}{i} \asymp \ln^2 n$$

Функцията $\frac{\ln x}{x}$ е положителна за $n \geq 2$. Отново ще пропуснем първия сумант и ще разгледаме исканите свойства:

$\frac{\ln x}{x}$ е намаляваща функция за $n \geq 2$, така че за всеки интервал от вида $[n, n + 1]$:

$$\min_{x \in [n, n+1]} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(n + 1)}{(n + 1)}, \quad \max_{x \in [n, n+1]} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln n}{n}$$

Освен това за всяко $n \geq 2$ имаме:

$$\frac{\ln n}{2n} \leq \frac{\ln n}{(n + 1)} \leq \frac{\ln(n + 1)}{(n + 1)}$$

В такъв случай:

$$\forall n \geq 2: \frac{\ln n}{2n} \leq \frac{\ln(n + 1)}{(n + 1)} = \min_{x \in [n, n+1]} f(x) \leq \max_{x \in [n, n+1]} f(x) = \frac{\ln n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$$

Сега прилагаме критерия и получаваме:

$$\sum_{i=2}^n \frac{\ln i}{i} = \Theta \left(\int_2^n \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_2^n \right) = \Theta(\ln^2 n)$$

Пример 6: Да се намери сложността по време на следния фрагмент:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = i; j <= n; j+=i)
    for (int k = 1; k <= n; k += j) printf("a");
```

За удобство ще апроксимираме $\Theta(g)$ със $c \cdot g$, където c е подходяща положителна константа.

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i, j=j+i}^n \sum_{k=1, k=k+j}^n 1 &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=i, j=j+i}^n \frac{n}{j} \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\frac{n}{i}} \frac{n}{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} \sum_{j=1}^{\frac{n}{i}} \frac{1}{j} \approx \sum_{i=1}^n \frac{n}{i} c \cdot \ln \frac{n}{i} = \\ &= c \cdot n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ln n - \ln i) = c \cdot n \ln n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - c \cdot n \sum_{i=1}^n \frac{\ln i}{i} \approx c \cdot n \cdot d \cdot \ln^2 n - c \cdot n \cdot e \cdot \ln^2 n = \Theta(n \ln^2 n) \end{aligned}$$

Пример 7: Да се намери сложността по време на следния фрагмент:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = 1; j <= n; j+=i)
    for (int k = 1; k <= n; k += j) printf("a");
```

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j=j+i}^n \sum_{k=1, k=k+j}^n 1 \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j=j+i}^n \frac{n}{j}$$

Да разгледаме следната сума:

$$\sum_{j=1, j=j+i}^n \frac{n}{j} = n + \frac{n}{1+i} + \frac{n}{1+2i} + \dots + \frac{n}{1 + \lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor i}$$

От интегралния критерий имаме:

$$\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+2i} + \dots + \frac{1}{1 + \lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor i} \approx \int_1^{\lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor} \frac{1}{1+xi} dx = \frac{1}{i} \ln(1+xi) \Big|_1^{\lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor} \approx \frac{\ln n}{i} - \frac{\ln(1+i)}{i}$$

В такъв случай:

$$\sum_{j=1, j=j+i}^n \frac{n}{j} \approx n + \frac{n \ln n}{i} - \frac{n \ln(1+i)}{i}$$

Сега:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j=j+i}^n \frac{n}{j} \approx \sum_{i=1}^n n + \frac{n \ln n}{i} - \frac{n \ln(1+i)}{i} \asymp n^2 + n \ln^2 n \asymp n^2$$