Домашно №2 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2015г.

ТЕМА: ИНДУКЦИЯ. РЕЛАЦИИ. ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6** *бонус*	**Макс.**
получени точки							
от максимално	15	15	15	15	12	15	72

Задача 1: (15т.) Докажете по индукция, че за всяко естествено число $n \geq 2$ е в сила следното твърдение: *всеки двоичен низ с дължина n, който започва с 0 и завършва с 1, съдържа подниз 01.*

Решение: Нека $P(n)$: *всеки двоичен низ с дължина n, който започва с 0 и завършва с 1, съдържа подниз 01.*

1. Доказателство, че е вярно $P(2)$: *всеки двоичен низ с дължина 2, който започва с 0 и завършва с 1, съдържа подниз 01*:

   Има един двоичен низ от този вид и той е 01, който очевидно съдържа подниз 01.

2. Допускаме, че за някакво естествено число $k \geq 2$ е вярно $P(k)$: *всеки двоичен низ с дължина k, който започва с 0 и завършва с 1, съдържа подниз 01.*

3. Доказателство, че е вярно $P(k+1)$: *всеки двоичен низ с дължина $k+1$, който започва с 0 и завършва с 1, съдържа подниз 01*:

   Нека $str = 0s_2...s_{k-1}s_k1$ е двоичен низ с дължина $k+1$. Ще докажем, че str съдържа подниз 01. За str има две възможности:

   а) $str = 0s_2...s_{k-1}01$ и очевидно съдържа подниз 01

   б) $str = 0s_2...s_{k-1}11$. Поднизът $0s_2...s_{k-1}1$ на str съдържа подниз 01, съгласно допускането в т.2, от което следва, че и str съдържа подниз 01.

Следователно, $P(n)$ е вярно за всяко естествено число $n \geq 2$.

Задача 2: (15т.) Рекурентната редица е определена по следния начин:

$$A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 4, A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} + A_{n-3}, n \geq 3 \quad (1)$$

Използвайте метода на силната индукция, за да докажете, че
$A_n \leq (2.2)^n, n \in \mathbb{N}$

<u>Решение:</u> Ще доказваме следното твърдение:
$P(n) : A_n \leq (2.2)^n$

1. Базови случаи:

   $P(0) : 1 = (2.2)^0$

   $P(1) : 2 < 2.2 = (2.2)^1$

   $P(2) : 4 < 4.84 = (2.2)^2$

   Твърдението е вярно в горните три случая.

2. Индуктивно предположение:

   За някое естествено число $k \geq 2$ е изпълнено:

   $P(i) : A_i \leq (2.2)^i$ е вярно $\forall i \in \{0, 1, ..., k\}$.

3. Индуктивна стъпка: Ще докажем верността на

   $P(k+1) : A_{k+1} \leq (2.2)^{k+1}$

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_k + 2A_{k-1} + A_{k-2} && \text{съгласно (1)}\\
&\leq (2.2)^k + 2(2.2)^{k-1} + (2.2)^{k-2} && \text{съгласно ИП}\\
&= (2.2)^{k-2}[(2.2)^2 + 2(2.2) + 1]\\
&= (2.2)^{k-2}[(2.2+1)^2]\\
&= (2.2)^{k-2}(3.2)^2\\
&= (2.2)^{k-2}(10.24)\\
&< (2.2)^{k-2}(10.648)\\
&= (2.2)^{k-2}(2.2)^3\\
&= (2.2)^{k+1}
\end{aligned}$$

4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко естествено число.

Задача 3: (15т.) Нека $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Докажете, че релацията $R_{\preceq} \subseteq J_2^n \times J_2^n = \{(\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n)) \in R_{\preceq} \Leftrightarrow \forall i \in I_n, a_i \leq b_i\}$, е релация на *частична наредба*, но не е релация на *пълна наредба*. Представете релацията чрез диаграма на Хасе за $n = 2, 3$.

<u>Решение:</u>

1. Релацията е рефлексивна, ако $\forall \alpha = (a_1, ..., a_n) \in J_2^n, (\alpha, \alpha) \in R_{\preceq}$.

   Доказателство: Нека $\alpha = (a_1, ..., a_n) \in J_2^n$. Тогава: $\forall i \in I_n, a_i \leq a_i \Rightarrow (\alpha, \alpha) \in R_{\preceq}$. Следователно, релацията е рфлексивна.

2. Релацията е транзитивна, ако $\forall \alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n), \gamma = (c_1, ..., c_n) \in J_2^n$, $(\alpha, \beta) \in R_{\preceq} \wedge (\beta, \gamma,) \in R_{\preceq} \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R_{\preceq}$.

   Доказателство: Нека $\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n), \gamma = (c_1, ..., c_n) \in J_2^n$, $(\alpha, \beta) \in R_{\preceq}, (\beta, \gamma,) \in R_{\preceq}$.Тогава: $(\alpha, \beta) \in R_{\preceq} \wedge (\beta, \gamma,) \in R_{\preceq} \Rightarrow \forall i \in I_n, a_i \leq b_i \wedge \forall i \in I_n, b_i \leq c_i \Rightarrow \forall i \in I_n, a_i \leq c_i \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R_{\preceq}$. Следователно, релацията е транзитивна.

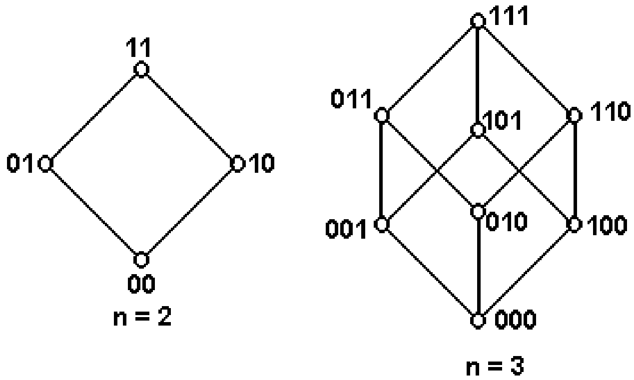
3. Релацията е антисиметрична, ако $\forall \alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n) \in J_2^n, (\alpha, \beta) \in R_{\preceq} \wedge (\beta, \alpha) \in R_{\preceq} \Rightarrow \alpha = \beta$.

   Доказателство: Нека $\alpha = (a_1, ..., a_n), \beta = (b_1, ..., b_n) \in J_2^n, (\alpha, \beta) \in R_{\preceq}, (\beta, \alpha) \in R_{\preceq}$. Тогава: $(\alpha, \beta) \in R_{\preceq} \wedge (\beta, \alpha) \in R_{\preceq} \Rightarrow \forall i \in I_n, a_i \leq b_i \wedge \forall i \in I_n, b_i \leq a_i \Rightarrow \forall i \in I_n, a_i = b_i \Rightarrow \alpha = \beta$. Следователно, релацията е антисиметрична.

4. Релацията е силно антисиметрична, ако $\forall \alpha = (a_1, ..., a_n) \neq \beta = (b_1, ..., b_n) \in J_2^n, (\alpha, \beta) \in R_{\preceq} \oplus (\beta, \alpha) \in R_{\preceq}$.

   Доказателство: Релацията не е силно антисиметрична, защото за $\alpha = (0, 1, 0, ..., 0) \neq \beta = (1, 0, 0, ..., 0) \in J_2^n$ е изпълнено: $(\alpha, \beta) \notin R_{\preceq}$ и $(\beta, \alpha) \notin R_{\preceq}$

Следователно, релацията е релация на *частична наредба*, но не е релация на *пълна наредба*.



Диаграми на Хасе

Задача 4: (15т.) Нека A е произволно множество, $R \subseteq A \times A$ е симетрична и транзитивна релация, а $P(x,y) : \forall x \exists y (xRy)$ е предикат с домейн A.

а)(6т.) Проверете, дали R притежава свойството рефлексивност;

Решение:

Проверката дава отрицателен резултат, т.е. може да се намери релация, която има свойствата симетричност и транзитивност, но не притежава свойството рефлексивност. Следва пример за това:

$A = \{1,2,3,4\}; \quad R \subseteq A \times A$

$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$

Както се вижда от примера, релацията R е симетрична и транзитивна, но не е рефлексивна, защото $(4,4) \notin R$

б)(9т.) Докажете, че ако R удовлетворява $P(x,y)$, то R е релация на еквивалентност.

Решение:

Нека $R \subseteq A \times A$ е произволна релация, която е симетрична и транзитивна и $\forall x \in A \exists y \in A(xRy)$.

Нека $x \in A$ е произволен елемент от домейна на релацията.

По условие $\exists y \in A((x,y) \in R)$

От симетричността на релацията следва, че $(y,x) \in R$

Тъй като релацията е транзитивна, $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow (x,x) \in R$

Следователно релацията е рефлексивна.

И така доказахме, че релация, която има указаните свойства задължително е рефлексивна, следователно е релация на еквивалентност.

Задача 5: (12т.) Функцията $f : J_8 \to J_8$ е дефинирана по следния начин: $f(x) = 5x \bmod 8$.

Докажете, че f е биекция и намерете обратната функция f^{-1}.

Решение:

Представяме функцията $f(x)$ с таблица:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	5	2	7	4	1	6	3

Както се вижда от таблицата на функцията, тя е:

- инекция, защото всеки два елемента от дефиниционното множество имат различни образи;

- сюрекция, защото всеки елемент на кодомейна има първообраз.

От това следва, че функцията е биекция.

От факта, че $f(x)$ е биекция, следва, че тя има обратна функция, която също е биекция. Следва таблица на обратната функция $f^{-1}(x)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f^{-1}(x)$	0	5	2	7	4	1	6	3

От сравняването на двете таблици е очевидно, че $f(x) = f^{-1}(x)$.

Задача 6: (15т.) Нека X е произволно множество, а $R_{\preceq} \subseteq X \times X$ е релация на частична наредба. Функцията $f : X \to X$ е *монотонна*, ако $\forall x \forall y (x \preceq y \to f(x) \preceq f(y))$.

Проверете дали всяка от следващите функции е монотонна:

а)(6т.) $X = \mathbb{N}, R_{\preceq} = \{(a,b) : a|b\}, \quad f(x) = x^2$

Решение:

Ще докажем, че функцията е монотонна.

Нека $x, y \in \mathbb{N}$ са два произволни елемента на дефиниционното множество, които са в релация.

$x \preceq y \;\Rightarrow\; x|y \;\Rightarrow\; x^2|y^2 \;\Rightarrow f(x)|f(y) \;\Rightarrow\; f(x) \preceq f(y)$

С това доказахме, че функцията удовлетворява дефиницията за монотонност.

б)(9т.) $X = 2^A, R_{\preceq} = \{(a,b) : a \subseteq b\}, \quad f(x) = A \setminus x$, където A е произволно множество.

Решение:

Функцията не е монотонна, което се вижда от следния пример:

Нека $\quad A = \{a,b\}, \quad X = 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$(\{a\}, \{a,b\}) \in R_{\preceq}$, защото $\{a\} \subset \{a,b\}$

$f(\{a\}) = A \setminus \{a\} = \{b\}, \; f(\{a,b\}) = A \setminus \{a,b\} = \emptyset$

$(f(\{a\}), f(\{a,b\})) \notin R_{\preceq}$, защото $\{a,b\} \not\subseteq \emptyset$

Следователно функцията не е монотонна.