Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, 24.04.2015г.

РЕШЕНИЯ

Име .... ф№.......... гр....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Макс.**
получени точки							
от максимално	15	20	12	5	15	28	80

Задача 1: (15т.) Нека A, B и C са произволни множества. Проверете истинността на следните твърдения:

а) (5т.) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq \overline{B}$.

Решение:

Ще докажем, че твърдението е вярно.

Нека x е произволен елемент на множеството $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Rightarrow$

$(x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C) \Rightarrow$

$(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \wedge (x \in A \wedge x \in \overline{C}) \Rightarrow$

$x \in A \wedge x \in \overline{B} \wedge x \in \overline{C} \Rightarrow$

$x \in \overline{B}$

Следователно, $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq \overline{B}$.

б) (5т.) ако $A \subseteq C$, то $A \cap (\overline{B \cap C}) = \emptyset$;

Решение:

Твърдението не е вярно, което ще докажем с контрапример.

Нека $A = \{1, 2\},\ B = \{2, 4, 5\},\ C = \{1, 2, 3, 4\},\ U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Очевидно, условието $A \subseteq C$ е изпълнено.

$$A \cap (\overline{B \cap C}) = \{1, 2\} \cap \overline{\{2, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4\}} =$$
$$= \{1, 2\} \cap \overline{\{2, 4\}} =$$
$$= \{1, 2\} \cap \{1, 3, 5\} =$$
$$= \{1\} \neq \emptyset$$

Следователно, твърдението не е вярно.

в) (5т.) $\overline{\overline{C} \cup (A \cap B)} = A \cap C$

Решение:

A	B	C	$\overline{C}$	$A \cap B$	$\overline{C} \cup (A \cap B)$	$\overline{\overline{C} \cup (A \cap B)}$	$A \cap C$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1

Заключение: Твърдението не е вярно, защото колоните, съответстващи на множествата, представени с левия и десния израз не съвпадат.

Задача 2: (20т.) Дадена е релацията $R \subseteq 2^A \times 2^A = \{(X,Y) \in R \Leftrightarrow |X| = |Y|\}$, $A = \{a_1, ..., a_{50}\}$.

а) (5т.) Докажете, че R е *релация на еквивалентност*

Решение:

1. Релацията е рефлексивна, ако $\forall X \in 2^A, (X,X) \in R$.

   Доказателство: Нека $X \in 2^A$. Тогава: $|X| = |X| \Rightarrow (X,X) \in R$. Следователно, релацията е рфлексивна.

2. Релацията е транзитивна, ако $\forall X, Y, Z \in 2^A$, $(X,Y) \in R \wedge (Y,Z,) \in R \Rightarrow (X,Z) \in R$.

   Доказателство: Нека $X, Y, Z \in 2^A$, $(X,Y) \in R \wedge (Y,Z,) \in R$. Тогава: $(X,Y) \in R \wedge (Y,Z) \in R \Rightarrow |X| = |Y| \wedge |Y| = |Z| \Rightarrow |X| = |Z| \Rightarrow (X,Z) \in R$. Следователно, релацията е транзитивна.

3. Релацията е симетрична, ако $\forall X, Y \in 2^A, (X,Y) \in R \Rightarrow (Y,X) \in R$.

   Доказателство: Нека $X, Y \in 2^A, (X,Y) \in R$. Тогава: $(X,Y) \in R \Rightarrow |X| = |Y| \Rightarrow |Y| = |X| \Rightarrow (Y,X) \in R$. Следователно, релацията е симетрична.

   Следователно, R е *релация на еквивалентност.*

б) (5т.) Опишете класовете на еквивалентност на R

Решение:
Класовете на еквивалетност са:
$[0] = \{X \in 2^A | |X| = 0\}$,
$[1] = \{X \in 2^A | |X| = 1\}$,
...
$[k] = \{X \in 2^A | |X| = k\}, 0 \leq k \leq 50$,
...
$[50] = \{X \in 2^A | |X| = 50\}$

в) (5т.) Определете броя на класовете на еквивалентност на R

Решение:
Броят на класовете на еквивалентност на R е 51.

г) (5т.) Определете броя на елементите на всеки клас на еквивалентност на R

Решение:
За всяко $k \in J_{51}$ броят на елементите на $[k]$ е $\binom{50}{k} = \dfrac{50!}{k! \times (50-k)!}$.

Задача 3: (12т.) Дадена е функцията $f : \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \to \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ако } x \text{ е четно} \\ -(x+1)/2 & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Проверете дали функцията е биекция и ако е такава, определете нейната обратна функция.

Решение:

Представяме функцията $f(x)$ с таблица:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4

Както се вижда от таблицата на функцията, тя е:

- инекция, защото всеки два елемента от дефиниционното множество имат различни образи;

- сюрекция, защото всеки елемент на кодомейна има първообраз.

От това следва, че функцията е биекция.

От факта, че $f(x)$ е биекция, следва, че тя има обратна функция, която също е биекция. Следва таблица на обратната функция:

$f^{-1}(x) : \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f^{-1}(x)$	7	5	3	1	0	2	4	6