Контролно №1 по Дискретни Структури, спец. Информатика, 24.04.2015г.
РЕШЕНИЯ

Име .... ф№.......... гр....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Макс.**
получени точки							
от максимално	15	20	12	5	15	28	80

Задача 4: (5т.) Проверете еквивалентни ли са следните логически изрази:
$(p \to q) \land (p \to r)$ и $p \to (q \land r)$.

Решение:

p	q	r	$q \land r$	$A = p \to (q \land r)$	$p \to r$	$p \to q$	$B = (p \to q) \land (p \to r)$	$A \leftrightarrow B$
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Заключение: Изразите са еквивалентни, защото $A \leftrightarrow B$ е тавтология.

Задача 5: (15т.) Приложете метода на математическата индукция, за да докажете следното тъждество:
$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2,\ n \in \mathbb{N}^+$

Решение:

Ще докажем следното твърдение:
$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2,\ n \in \mathbb{N}^+$

1. Базов случай:

   $P(1) : \sum_{k=1}^{1} k2^k = (1-1)2^{1+1} + 2$

   $1.2^1 = 0 + 2$

   Твърдението е вярно.

2. Индуктивна хипотеза: Предполагаме, че твърдението е вярно за някое положително естествено число m:

   $P(m) : \sum_{k=1}^{m} k2^k = (m-1)2^{m+1} + 2$

3. Индуктивна стъпка: Ще докажем верността на
   $P(m+1) : \sum_{k=1}^{m+1} k2^k = m2^{m+2} + 2$
   Преработваме лявата страна:
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k2^k &= (m+1)2^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} k2^k \\ &= (m+1)2^{m+1} + (m-1)2^{m+1} + 2 \quad \text{съгласно ИХ} \\ &= (m+1+m-1)2^{m+1} + 2 \\ &= (2m)2^{m+1} + 2 \\ &= m2^{m+2} + 2\end{aligned}$$

4. Заключение: Твърдението е вярно за всяко положително естествено число.

Задача 6: (28т.) Нека $A \subseteq \mathbb{N}$ и $B \subseteq \mathbb{N}$. Функцията $f : A \to B$ е *монотонно ненамаляваща*, ако $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

а) (4т.) Проверете дали функциите $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{1,2,3\}$ и $g : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2\}$, зададени таблично, са монотонно ненамаляващи

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	1	1	1	2	2	2	2	3

x	1	2	3	4	5	6
g(x)	1	1	1	2	1	2

Решение:

Функцията $f(x)$ е монотонно ненамаляваща, защото $\forall x_1, x_2 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, както се вижда от таблицата.

Функцията $g(x)$ не е монотонно ненамаляваща, защото за $4, 5 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ е изпълнено $4 < 5$, но $g(4) > g(5)$, както се вижда от таблицата.

б) (7т.) Определете броя на всички монотонно ненамаляващи функции $f : \{1, 2, ..., k\} \to \{1, 2, ..., n\}$

Решение:

На всяко мултимножество $\{(1, a_1), (2, a_2), ..., (n, a_n)\}$, $\forall i \in I_n, a_i \in \mathbb{Z} \wedge a_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$, еднозначно съответства монотонно ненамаляващата функция

$$f(x) = (f(1), f(2), ..., f(k)) = (\underbrace{1, ..., 1}_{a_1}, \underbrace{2, ..., 2}_{a_2}, ... \underbrace{n, ..., n}_{a_n}).$$

Следователно, броят на функциите е $\binom{k+(n-1)}{k} = \binom{k+(n-1)}{n-1} = \dfrac{(k+(n-1))!}{k! \times (n-1)!}$.

в) (7т.) Определете броя на функциите-инекции от т.б)

Решение:

Броят на функциите е $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$, защото на всяко множество $\{y_1, y_2, ..., y_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}, y_1 < y_2 < ... < y_k$, еднозначно съответства монотонно ненамаляващата функция $f(x) = (f(1), f(2), ..., f(k)) = (y_1, y_2, ..., y_k)$.

г) (10т.) Определете броя на функциите-сюрекции от т.б)

<u>Решение:</u>

На всяко мултимножество $\{(1, a_1), (2, a_2), ..., (n, a_n)\}$, $\forall i \in I_n, a_i \in \mathbb{Z} \wedge a_i \geq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$, еднозначно съответства монотонно ненамаляващата функция

$$f(x) = (f(1), f(2), ..., f(k)) = (1, \underbrace{1, ..., 1}_{a_1 - 1}, 2, \underbrace{2, ..., 2}_{a_2 - 1}, ...n, \underbrace{n, ..., n}_{a_n - 1}).$$

Следователно, броят на функциите е $\binom{(k-n)+(n-1)}{k-n} = \binom{(k-n)+(n-1)}{n-1} = \dfrac{(k-1))!}{(k-n)! \times (n-1)!}$.