Семестриална контролна работа по ДАА, КН2, 19.04.2015 г.

Име: .... ФN°: .... Гр.: ....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
от максимално	15	18	20	15	12	20	100

Зад. 1 Докажете или опровергайте, че ако $f(n) = O(g(n))$ и $f(n) \neq \Theta(g(n))$, то $f(n) = o(g(n))$.

Зад. 2 Наредете по асимптотично нарастване следните десет функции. Обосновете отговорите си кратко. Напишете в явен вид самата наредба.

$$f_1 = (\lg n)^{\lg n}, \quad f_2 = n^{\lg n!}, \quad f_3 = n^3 + 3n^2, \quad f_4 = 1 + \binom{\lg n}{\frac{1}{2}\lg n}, \quad f_5 = n^2$$

$$f_6 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad f_7 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad f_8 = n^{\lg \lg n}, \quad f_9 = 1 + \binom{\lg n}{n}, \quad f_{10} = \lg \lg n$$

Заради функции f_4 и f_9 можете да допуснете, че n е точна степен на двойката.

Зад. 3 Даден е масив $A[1, \dots, n]$ от цели различни числа. *Склон* в $A[1, \dots, n]$ ще наричаме всеки максимален по включване подмасив $A[i, \dots, j]$, такъв че $i \leq j$ и $A[k] < A[k+1]$ за $i \leq k < j$. Примерно, масивът

$$[\ \boxed{2,\ 7,\ 9}, \boxed{6,\ 8}, \boxed{5}, \boxed{1,\ 2,\ 6}\ ]$$

има четири склона, които са оградени с правоъгълници.

2 т. • Предложете алгоритъм със сложност по време $O(n)$ и сложност по памет $\Theta(1)$, който изчислява броя на склоновете.

18 т. • Докажете формално коректността на Вашия алгоритъм.

Зад. 4 Дадени са 4 топки. Всяка е надписана с точно едно от A, B, C, D. Известно е, че една от топките тежи 1 килограм, една тежи 2 килограма, една тежи 3 килограма и една тежи 4 килограма. Дадена е везна без теглилки с две блюда, в които може да се слагат топките. Целта е да определим коя от топките колко килограма тежи, използвайки везната, като я използваме колкото е възможно по-малко пъти. Докажете, че броят на измерванията е поне 3.

20 т. бонус *Бонус към **Зад. 4**: покажете схема на измервания, чрез която с не повече от три измервания намираме коя топка колко тежи, или докажете, че такава схема не съществува.*

Зад. 5 Решете следните рекурентни отношения:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + 1, \qquad P(n) = \sqrt[3]{5}\,T\left(\frac{n}{\sqrt{5}}\right) + 1,$$

$$Q(n) = 2Q(n-1) + 2^{\frac{n}{2}} + \sqrt[4]{4^n}, \qquad R(n) = nR(n-1) + 1$$

Относно $R(n)$: достатъчно е да го решите чрез развиване.

Зад. 6 Задачата Търсене в сортиран масив е: при даден сортиран масив $A[1, \dots, n]$ и дадено число k да се отговори дали k се съдържа в $A[1, \dots, n]$ или не. Известно е, че можем да търсим ефикасно в сортиран масив чрез двоично търсене във време $\Theta(\lg n)$ в най-лошия случай.

Докажете, че задачата Търсене в сортиран масив има долна граница $\Omega(\lg n)$, ако търсенето е базирано на директни сравнения. Това означава, че достъпът до елементите на $A[]$ става по един единствен начин: само чрез сравнения от вида $A[i] \stackrel{?}{=} k$.
*Упътване: съобразете колко различни "ситуации" може да има за даденото число, което търсим в масива, **спрямо** дадения сортиран масив. Използвайте дърво на вземане на решения.*