Домашно №3 по Дискретни Структури, спец. Информатика, летен семестър 2015г.

ТЕМА: КОМБИНАТОРИКА
РЕШЕНИЯ

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**Макс.**
получени точки					
от максимално	12	15	20	15	62

Задача 1: (12т.) Всяко квадратче на мрежа 3×3 се оцветява в един от 9 цвята, сред които червен, зелен, син и жълт.

Номерираме квадратчетата на мрежата, както е показано на рисунката.

7	6	5
8	9	4
1	2	3

Нека $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B, |B| = 9$, е множеството от цветове.

На всяко оцветяване $\begin{array}{|c|c|c|} \hline c_7 & c_6 & c_5 \\ \hline c_8 & c_9 & c_4 \\ \hline c_1 & c_2 & c_3 \\ \hline \end{array}$ еднозначно съответства вектор $(c_1, ..., c_9)$.

а)(2т.) Определете броя на всички оцветявания на мрежата

<u>Решение:</u>

На всяко оцветяване на мрежата съответства наредена 9-торка с повторение, от елементи на множеството B. Следователно, броят на всички оцветявания е $9^9 = 387420489$.

б)(2т.) Определете оцветяванията на мрежата, такива че всеки две квадратчета са оцветени в различен цвят

<u>Решение:</u>

На всяко оцветяване на мрежата съответства пермутация на елементите на множеството B. Следователно, търсеният брой е $9! = 362880$.

в)(2т.) Определете броя на оцветяванията на мрежата, такива че 3 квадратчета са оцветени в червено, 2 – в синьо, 1 – в зелено, 3 – в жълто

Решение:

На всяко оцветяване на мрежата съответства пермутация на елементите на мултимножеството

$\{red, red, red, blue, blue, green, yellow, yellow, yellow\}_M$.

Следователно, търсеният брой е $\dfrac{9!}{3! \times 2! \times 1! \times 3!} = 5040$.

г)(3т.) Определете броя на оцветяванията на мрежата, такива че са използвани 5 от деветте цвята

Решение:

Пет цвята от девет може да се изберат по $\binom{9}{5}$ начина. Всяко оцветяване на мрежата с избраните пет цвята, като всеки цвят е използван поне веднъж, определя сюрекция с домейн A и кодомейн – множеството от избраните цветове. Следователно, броят на тези оцветявания е равен на броя на сюрекциите, а именно $\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^9$.

Следователно, търсеният брой е $\binom{9}{5} \times \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^9$.

д)(3т.) Определете броя на оцветяванията, такива че за всеки ред е изпълнено: всеки от цветовете червен и зелен е използван поне веднъж

Решение:

Броят на оцветяванията на всеки ред е $9^3 - 2 \times 8^3 + 7^3 = 48$. Следователно, търсеният брой е $48^3 = 110592$.

Задача 2: (15т.) Определете броя на думите, които се получават чрез разместване на главните букви на българската азбука, всяка от които не съдържа никоя от думите: ЕДНО, ТРИ, СУМА, като поддума.

Решение:

Нека U е множеството от всички думи, които се получават чрез разместване на главните букви на българската азбука, $A_1 \subseteq U$ - множеството от думи, които съдържат поддумата ЕДНО, $A_2 \subseteq U$ - множеството от думи, които съдържат поддумата ТРИ, $A_3 \subseteq U$ - множеството от думи, които съдържат поддумата СУМА. Тогава, думите, чиито брой търсим, са елементите на множеството $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ и съгласно принципа на включването и изключването техният брой е $|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| =$
$= |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$
$= 30! - (27! + 28! + 27!) + (25! + 24! + 25!) - 22! =$
$= 264926225370422995738919239680000.$

Задача 3: (20т.) Един ден в книжарницата на ФМИ докарали 3 нови книги по Програмиране, всяка в 20 екземпляра и два учебника по Дискретна математика, всеки в 30 екземпляра. Този ден в книжарницата се отбили 19 студенти - 9 момичета и 10 момчета, като всеки от тях си купил по една книга. Определете по колко начина студентите са могли да направят своя избор, ако:

а)(2т.) не е имало никакви ограничения при избора на книга;

<u>Решение:</u>

Тъй като броят на екземплярите от всяка книга е по-голям от броя на студентите, то всеки студент може да закупи коя да е от книгите. Така броят на начините, по които 19 студенти могат да закупят 5 книги е $5^{19} = 19073486328125$.

б)(4т.) всички момчета са купили книги по програмиране, а момичетата са избрали книги и от двата вида;

<u>Решение:</u>

Десетте момчета са избирали измежду три книги, това може да стане по 3^{10} начина. Момичетата са имали избор между 5 книги от два вида, като непременно са избрали и от двата вида, затова от общия брой възможности трябва да извадим случаите, в които в избора е участвал само единият вид: $5^9 - 3^9 - 2^9$. Всеки избор, направен от момчетата може да се съчетае с кой да е избор на момичетата, така общият брой възможни избори е $3^{10} * (5^9 - 3^9 - 2^9) = 114137583570$.

в)(4т.) има продаден екземпляр от всяка книга;

<u>Решение:</u>

Да означим множеството на момчетата с M, множеството на момичетата с F и множеството на книгите с B. Изборът на книга от всеки студент определя следната функция $f : M \cup F \to B$. Условието да има продаден екзампляр от всяка книга ще е изпълнено точно тогава, когато функцията f е сюрекция.

Знаем, че домейнът на функцията съдържа 19 елемента, а кодомейнът - 5, така търсеният брой е:

$\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^{19}$

г)(5т.) всяка от новите книги е купена както от момче, така и от момиче;

<u>Решение:</u>

Изборът на момичетата дефинира функция $f : F \to B$, а изборът на момчетата - функция $g : M \to B$. За да се изпълни исканото условие трябва и двете функции да са сюрекции. Момичетата и момчетата правят избора си независимо едни от други, така че търсеният брой е:

$(\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^{9}) * (\sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}(5-i)^{10})$

д)(5т.) в края на деня се установило, че от всяка от книгите по програмиране са продадени точно по два екземпляра.

<u>Решение:</u>

Да разгледаме поотделно продадените книги по Програмиране и по Дискретна математика. От трите книги по Програмиране са продадени по два екземпляра, като екземплярите на първата книга могат да се разпределят между студентите по $\binom{19}{2}$ начина, за втората книга по $\binom{17}{2}$ начина, а за третата по $\binom{15}{2}$ начина. Така броят на начините за разпределяне на шестте книги по Програмиране е $\binom{19}{2} * \binom{17}{2} * \binom{15}{2}$.

Учебник по ДМ са си купили 13 студенти, като всеки от тях е имал две възможности за избор, т.е. общо 2^{13} възможности.

$\binom{19}{2} * \binom{17}{2} * \binom{15}{2} * 2^{13} = 20003880960$

Задача 4: (15т.) Градинар засадил леха с 121 лалета, като ги подредил в 11 реда и 11 колони. На следващата година решил да ги размести, като всяка луковица премести на същия ред в съседна колона, или на съседен ред в същата колона. След като се трудил цял ден, градинарят установил, че както и да мести луковиците, винаги две попадат в едно и също гнездо. Тогава се сетил да се обърне за съвет към съседа си - математик. Последният му казал да прекрати опитите, защото това, което иска да направи, не е възможно.

Обосновете отговора на съседа - математик.

Решение: Да си представим лехата с гнезда за засаждане на лалета като шахматна дъска с квадратчета, боядисани в два цвята - бяло и черно. Изискването за преместване на луковиците означава, че всяка от тях ще бъде преместена в квадратче с различен цвят. Тъй като общият брой на квадратчетата е нечетен, то броят на квадратчетата от единия цвят, например бял, ще е по-голям от броя квадратчета от другия цвят. Всяка луковица от бяло квадратче, т.е. 61 на брой, трябва да попадне в черно квадратче, а такива има 60. Принципът на Дирихле ни дава отговор на въпроса дали е възможно при това всяка луковица да е сама в гнездото и този отговор е НЕ.