Писмен изпит по ДАА, КН II поток, 28.06.2014 г.

Име: .... Ф№: .... Група: ....

Задача	1	2	3	4	5	6	Макс.
получени точки							
от максимално	20	20	20	40	20	20	140

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки.

Зад. 1 Решете следните рекурентни отношения:

а) $T(n) = \sqrt{8}T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + \binom{n}{3}$ б) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + n \lg n$

в) $T(n) = T(n-1) + \sqrt{n}$ г) $T(n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} T(i) + 3^n$

Зад. 2 Дадена е шахматна дъска с размери $n \times n$. Върху някои полета има шахматни фигури. Позициите, в които има фигури, са зададени чрез булева матрица $B_{n\times n}$. Предложете бърз алгоритъм, който определя дали топ, намиращ се на позиция $(1, 1)$ може да достигне позиция (n, n) без да преминава през заетите от другите фигури полета. При достижимост алгоритъмът трябва да изчисли минималния брой ходове на топа. *Пояснение: в шаха, топът се движи само по хоризонтал или по вертикал.*

Зад. 3 Дадени са n панички $p_1, \ldots, p_n$. В p_i има a_i монети от по 1 лев, за $1 \le i \le n$. Имате право да вземете монети, но със следните ограничения:

- ако вземате монети от дадена паничка, трябва да вземете всички монети от нея,
- можете да вземете монетите от една или повече панички само ако сумата им се дели на три.

Предложете алгоритъм със сложност по време $O(n)$, който да ви осигури максимална печалба.

Зад. 4 Софтуерна фирма Щастливи Байтове има N софтуериста, които се разбиват на N_1 дивелъпъри и N_2 тестъри (очевидно $N_1 + N_2 = N$). Фирмата наема нов офис, който е един цял етаж на сграда. Този етаж е разделен на кюбикъли, които са точно N (cubicle е частично оградено работно място). Шефът би искал да не прави никакви преустройства в офиса, но има твърдо изискване, да няма двама дивелъпъри в съседни кюбикъли и да няма двама тестъри в съседни кюбикъли. Не се дефинира "съседни кюбикъли". Просто са дадени числата N_1 и N_2 и за всеки кюбикъл са изброени съседите му. Предложете ефикасен алгоритъм, който да върне True, ако има начин да бъдат подредени софтуеристите така, че изискването да бъде спазено, и False в противен случай.

Зад. 5 Дадена е пътна мрежа на някаква държава, която се състои от градове и шосета. *Шосе* е пътен участък без междинни градове. Всяко шосе свързва два града. Входът е масив с имената на градовете $c_1, \ldots, c_n$, като за всеки град c_i са изброени градовете, между всеки от които и c_i има шосе. Между два града има най-много едно шосе. Пътната мрежа е такава, че по нея може да се пътува между всеки два града. *Критично шосе* е всяко шосе, което, ако бъде затворено, между поне една двойка градове вече не може да се пътува. Предложете $O(n + m)$ алгоритъм, който извежда всички критични шосета.

Зад. 6 Дадена е матрица $A_{n\times n}$ от цели числа. Матрицата е сортирана по редове и колони, което означава, във всеки ред числата са сортирани отляво надясно и във всяка колона, отгоре надолу. Дадено е и цяло число m. Докажете, че всеки алгоритъм, който връща True, ако m се намира в A, и False в противен случай, работи във време $\Omega(n)$ в най-лошия случай.